

Relèvements d'opérateurs différentiels sur les anneaux d'invariants

THIERRY LEVASSEUR

A J. Dixmier pour son 65ème anniversaire

O. Introduction et Notations

Le corps de base est celui des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

0.1 Si X est une variété algébrique irréductible affine on note : $\mathcal{O}(X)$ l'anneau des fonctions régulières sur X , $\mathcal{D}(X)$ l'anneau des opérateurs différentiels (o.d. en abrégé) sur X , $\mathcal{D}er^m(X)$ le $\mathcal{O}(X)$ -module des o.d. d'ordre $\leq m$ sans terme constant, $\mathcal{D}^m(X) = \mathcal{O}(X) \oplus \mathcal{D}er^m(X)$, cf. 1.1 et 1.2.

Soit $G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire de dimension finie d'un groupe réductif G , on désigne par $V//G$ la variété affine telle que $\mathcal{O}(V//G) = \mathcal{O}(V)^G$. Le groupe G opère naturellement sur $\mathcal{D}(V)$ en laissant stable chaque $\mathcal{D}er^m(V)$. On dit que (V, G) a la propriété de relèvement à l'ordre m si le morphisme de restriction $\varphi : \mathcal{D}er^m(V)^G \rightarrow \mathcal{D}er^m(V//G)$ est surjectif; si cette propriété est vérifiée pour tout m on dira que (V, G) a la propriété de relèvement, ce qui implique alors la surjectivité du morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow \mathcal{D}(V//G)$.

0.2 Si $m = 1$ $\mathcal{D}er^1(V//G)$, resp. $\mathcal{D}er^1(V)^G$, n'est autre que l'espace des champs de vecteurs sur $V//G$, resp. des champs de vecteurs invariants sur V . Le relèvement à l'ordre 1 a été étudié par G. Schwarz dans [S]. Rappelons que $V//G$ possède une stratification finie, paramétrée par les classes de conjugaison des groupes d'isotropie des points d'orbite fermée; il existe une strate ouverte que nous appellerons strate principale et noterons $\Omega(V//G)$. On désigne par $\mathcal{A}(V//G)$ l'idéal de $\mathcal{O}(V)^G$ définissant le complémentaire de $\Omega(V//G)$. Il est en particulier démontré dans [S] que si $G \rightarrow GL(V)$ est orthogonalisable et si la hauteur de $\mathcal{A}(V//G)$ est ≥ 2 alors (V, G) a la propriété de relèvement à l'ordre 1. Si m est quelconque des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il y ait relèvement à l'ordre m

ont été données, lorsque G est fini dans $[K]$, lorsque G est un tore dans $[Mu]$.

0.3 Nous proposons au §3 une condition suffisante pour que (V, G) possède la propriété de relèvement. Soit $gr\varphi : gr\mathcal{D}(V)^G \rightarrow gr\mathcal{D}(V//G)$ le morphisme gradué associé au morphisme filtré φ , posons $K = \text{Ker}(gr\varphi)$, $R = \frac{gr\mathcal{D}(V)^G}{K}$; notons que R est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative intègre, de type fini, graduée, contenant $\mathcal{O}(V)^G$ en degré 0. On montre alors, (3.6, théorème) :

Théorème. *Supposons que R vérifie la condition (S_2) et que $\mathcal{A}(V//G)$ engendre un idéal de hauteur ≥ 2 dans R , alors (V, G) a la propriété de relèvement.*

Ce résultat, de démonstration élémentaire, a l'inconvénient de nécessiter une bonne connaissance de R . Néanmoins il permet de traiter les cas G fini et $G = \mathbb{C}^*$ (l'anneau R étant connu dans le cas des tores grâce à $[Mu]$).

0.4 Une autre application de 0.3 est donnée au §5, elle concerne les o.d. sur les anneaux classiques d'invariants. On étudie les trois cas :

$$(V, G) = \begin{cases} (M_{pk}(\mathbb{C}) \times M_{kq}(\mathbb{C}), GL(k, \mathbb{C})) \\ (M_{kn}(\mathbb{C}), O(k, \mathbb{C})) \\ (M_{2kn}(\mathbb{C}), Sp(2k, \mathbb{C})) \end{cases}$$

où GL, O, Sp désignent respectivement les groupes linéaire, orthogonal et symplectique opérant "naturellement" sur les espaces de matrices de taille appropriée, (cf 5.3). On retrouve un des résultats de $[Le-St]$:

Théorème. *Soit (V, G) comme ci-dessus ; si $V//G$ n'est pas lisse alors (V, G) a la propriété de relèvement.*

Utilisant les résultats de R. Howe sur les paires réductives duales, on sait qu'il existe un morphisme surjectif $\omega : U(\mathfrak{g}') \rightarrow \mathcal{D}(V)^G$ où $\mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie semi-simple d'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}')$, le noyau de $\varphi\omega$ étant un idéal primitif I . La preuve donnée dans $[Le-St]$ repose en partie sur le fait que I est maximal (lorsque $V//G$ n'est pas lisse). Le théorème de 0.3 permet de s'affranchir de cette vérification (qui utilise la classification des idéaux primitifs) et fournit de plus l'information $\sqrt{gr I} = gr I$, où $gr I$ est l'idéal gradué associé à I pour la filtration naturelle de $U(\mathfrak{g}')$. Malheureusement cette nouvelle démonstration ne donne pas la maximalité de I .

0.5 Les notations qui suivent seront librement utilisées. Si A est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative de type fini on désigne par $\text{Spec } A$ l'ensemble de ses idéaux premiers et on pose

$$\text{Reg } A = \{\mathcal{P} \in \text{Spec } A / \mathcal{P} \text{ régulier}\}, \text{Sing } A = \text{Spec } A \setminus \text{Reg } A.$$

Si A est intègre on dit que : A est normale lorsque A est intégralement clos et A vérifie la condition (S_2) si $A = \bigcap_{ht \mathcal{P}=1} A_{\mathcal{P}}$ où ht est la hauteur d'un idéal. Soit V une variété algébrique définie sur $\mathbb{C}$, $\mathcal{O}_V$ son faisceau structural et $\mathcal{O}(V)$ la $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions régulières sur V . Si V est affine on identifie $(V, \mathcal{O}_V)$ à $\text{Spec } \mathcal{O}(V)$. Soit p un point (fermé) de V on note $\mathcal{M}_p$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{V,p}$ de V en p . On définit $\text{Reg } V = \{p \in V / \mathcal{O}_{V,p} \text{ régulier}\}$, $\text{Sing } V = V \setminus \text{Reg } V$; si $\text{Reg } V = V$ on dit que V est lisse. Supposons de plus la variété V affine ; si $\mathcal{I}$ est un idéal de $\mathcal{O}(V)$ on pose

$$\mathcal{V}(\mathcal{I}) = \{P \in \text{Spec } \mathcal{O}(V) / \mathcal{P} \supseteq \mathcal{I}\}$$

et inversement si F est fermé dans V , $\mathcal{I}(F)$ est l'idéal radiciel définissant F ; V est dite normale si $\mathcal{O}(V)$ l'est.

Si $t_1, \dots, t_s$ sont des éléments d'un anneau et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \mathbb{N}^s$ on pose $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_s^{\alpha_s}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$.

1. Généralités

1.1 Etant donnée une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative intègre A , nous désignons par $\mathcal{D}(A)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur A . Rappelons, cf [E.G.A.] ou [M.R.], que $\mathcal{D}(A) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{D}^m(A)$ où $\mathcal{D}^m(A)$ est le A -module des opérateurs différentiels (o.d. en abrégé) d'ordre $\leq m$, défini par :

$$\mathcal{D}^m(A) = \{D \in \text{End}_{\mathbb{C}} A / \forall a_0, \dots, a_m \in A \quad [a_0[a_1[\dots[a_m D]] \dots] = 0\}.$$

On pose $\mathcal{D}^m(A) = (0)$ si $m < 0$; notons que $\mathcal{D}^0(A) = A$. La sous-algèbre $\mathcal{D}(A)$ de $\text{End}_{\mathbb{C}} A$ est filtrée par les $\mathcal{D}^m(A)$ d'anneau gradué associé $gr \mathcal{D}(A) := \bigoplus_m \frac{\mathcal{D}^m(A)}{\mathcal{D}^{m-1}(A)}$, qui est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative intègre. On note $gr_m : \mathcal{D}^m(A) \rightarrow gr_m \mathcal{D}(A) := \frac{\mathcal{D}^m(A)}{\mathcal{D}^{m-1}(A)}$ la projection canonique. Si $P \in \mathcal{D}^m(A) \setminus \mathcal{D}^{m-1}(A)$ on dit que P est d'ordre m et on pose $\text{ord } P = m$, le symbole principal de P étant alors $gr_m P$. L'action de $\mathcal{D}(A)$ sur A , provenant de celle de $\text{End}_{\mathbb{C}} A$, sera notée $a \rightarrow P * a$, $a \in A$, $P \in \mathcal{D}(A)$.

Le sous- A -module de $\mathcal{D}^m(A)$ formé des o.d. sans terme constant d'ordre $\leq m$ est donc

$$\mathcal{D}er^m(A) = \{D \in \mathcal{D}^m(A) / D * 1 = 0\}.$$

Ainsi $\mathcal{D}^m(A) = A \oplus \mathcal{D}er^m(A)$ et $\mathcal{D}er^1(A)$ est le A -module des dérivations $\mathbb{C}$ -linéaires de A . Rappelons que $\mathcal{D}er^1(A) \cong \text{Hom}_A(\Omega_A^1, A)$ où Ω_A^1 est le A -module des différentielles d'ordre 1. On pose $\mathcal{D}er(A) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{D}er^m(A)$.

Supposons désormais que A soit de plus une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini. Alors, les $\mathcal{D}er^m(A)$ sont des A -modules de type fini et si $S \subset A \setminus \{0\}$ est multiplicativement stable, S est une partie de Ore dans $\mathcal{D}(A)$ et on a les identifications :

$$\mathcal{D}(S^{-1}A) = S^{-1}\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A)S^{-1}, \quad \mathcal{D}er^m(S^{-1}A) = S^{-1}A \otimes_A \mathcal{D}er^m(A).$$

En outre, puisque $gr_0 \mathcal{D}(A) = A$, les éléments de S s'identifient à leurs images par gr_0 et l'algèbre localisée $S^{-1}gr \mathcal{D}(A)$ s'identifie canoniquement à $gr \mathcal{D}(S^{-1}A)$.

Lorsque $S = A \setminus \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \in \text{Spec} A$, on notera $\mathcal{D}^*(A_{\mathcal{P}})$, $\mathcal{D}er^*(A_{\mathcal{P}})$ etc... à la place de $S^{-1}\mathcal{D}^*(A)$, $S^{-1}\mathcal{D}er^*(A)$ etc.... Signalons enfin que si $S^{-1}A$ est un anneau régulier, l'algèbre $\mathcal{D}(S^{-1}A)$ est engendrée sur $\mathbb{C}$ par $S^{-1}A$ et $\mathcal{D}er^1(S^{-1}(A))$, qui est un $S^{-1}A$ -module projectif de type fini. L'anneau $gr \mathcal{D}(S^{-1}A)$ s'identifie alors à l'algèbre symétrique de ce module et $\mathcal{D}^m(S^{-1}A)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires sur $S^{-1}A$ des produits d'au plus m dérivations.

1.2 Soit V une variété irréductible affine ; ce qui a été rappelé en 1.1 s'applique à $A = \mathcal{O}(V)$. Dans ce cas nous substituerons les notations $\mathcal{D}^*(V)$, $\mathcal{D}er^*(V)$ à $\mathcal{D}^*(A)$, $\mathcal{D}er^*(A)$ etc... Si p est un point fermé de V , $\mathcal{D}(V)_p$ désignera $\mathcal{D}(\mathcal{O}_{V,p})$. Nous utiliserons parfois la notation Θ_V , à la place de $\mathcal{D}er^1(V)$, pour désigner le module des dérivations.

Il découle de 1.1 que si V est de plus supposée lisse, $gr \mathcal{D}(V)$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini régulière, et pour $p \in V$ l'espace tangent à V en p , noté $T_p V$, s'identifie à l'espace vectoriel $\frac{\mathcal{D}er^1(V)_p}{\mathcal{M}_p \mathcal{D}er^1(V)_p}$ des dérivations ponctuelles sur $\mathcal{O}_{V,p}$.

2. Opérateurs différentiels sur les espaces d'orbites

2.1 On fixe une variété algébrique affine irréductible V et un groupe algébrique réductif G opérant rationnellement sur V . On note $V//G$ la

variété affine telle que $\mathcal{O}(V//G) = \mathcal{O}(V)^G$ (anneau des invariants). Le comorphisme de l'inclusion $\mathcal{O}(V)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$ sera désigné par π_V (ou π), donc $\pi_V : V \rightarrow V//G$, c'est un morphisme surjectif.

Le groupe G opère naturellement sur $\mathcal{D}^m(V)$ pour tout m par la règle:

$$g \cdot D * f = g \cdot (D * g^{-1} \cdot f), \quad g \in G, D \in \mathcal{D}^m(V), f \in \mathcal{O}(V).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathcal{D}^m(V)$ est un G -module rationnel. On peut donc considérer la $\mathbb{C}$ -algèbre $\mathcal{D}(V)^G$ des o.d. invariants ; elle est filtrée par les $\mathcal{D}^m(V)^G$ qui sont des $\mathcal{O}(V)^G$ -modules de type fini, cf ([B-H], Theorem 3.1). On dispose alors de morphismes naturels de $\mathcal{O}(V)^G$ -modules

$$\varphi : \mathcal{D}^m(V)^G \rightarrow \mathcal{D}^m(V//G)$$

φ étant l'application de restriction : $\varphi(P) * f = P * f$, $P \in \mathcal{D}^m(V)^G$, $f \in \mathcal{O}(V)^G$. Ceci donne un morphisme de $\mathbb{C}$ -algèbres filtrées $\varphi : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow \mathcal{D}(V//G)$. On notera J le noyau de φ et U l'algèbre quotient $\frac{\mathcal{D}(V)^G}{J}$; elle est filtrée par les $U^m = \frac{\mathcal{D}^m(V)^G + J}{J \cap \mathcal{D}^m(V)^G} \cong \frac{\mathcal{D}^m(V)^G}{J \cap \mathcal{D}^m(V)^G}$. On pose $gr U = \bigoplus \frac{U^m}{U^{m-1}}$.

Remarquons que G opère dans $gr_m \mathcal{D}(V)$ pour tout m et que, G étant réductif, on peut identifier les $\mathcal{O}(V)^G$ -modules $[gr_m \mathcal{D}(V)]^G$ et $gr_m[\mathcal{D}(V)^G] = \frac{\mathcal{D}^m(V)^G}{\mathcal{D}^{m-1}(V)^G}$, et les algèbres graduées $[gr \mathcal{D}(V)]^G$ et $gr[\mathcal{D}(V)^G]$.

Le morphisme φ induit un morphisme (injectif) filtré que nous noterons encore φ , de U dans $\mathcal{D}(V//G)$, et des morphismes gradués $gr \varphi : gr \mathcal{D}(V)^G \rightarrow gr \mathcal{D}(V//G)$ et $gr \varphi : gr U \rightarrow gr \mathcal{D}(V//G)$. Notons que $gr U = \frac{gr \mathcal{D}(V)^G}{gr J}$, où $gr J$ est l'idéal gradué associé, et que $K = \text{Ker}(gr \varphi) \supseteq gr J$. On fera l'abus de notation consistant à encore noter K à la place de $\frac{K}{gr J}$. Insistons sur la définition de $K : gr_m P \in \text{Ker}(gr \varphi) = K$ équivaut à $\varphi(P) \in \mathcal{D}^{m-1}(V//G)$. Signalons aussi que : $J \cap \mathcal{O}(V)^G = K \cap gr_0 \mathcal{D}(V)^G = (0)$, φ et $gr \varphi$ sont l'identité sur $\mathcal{O}(V)^G$, U^m et $J \cap \mathcal{D}^m(V)^G$ sont des $\mathcal{O}(V)^G$ -modules.

2.2 On suppose ici que V est une variété algébrique affine lisse et que G est un groupe réductif opérant sur V (rationnellement). Dans ce cas $gr \mathcal{D}(V)^G$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini, cf (1.2. et 2.1.), donc $\mathcal{D}(V)^G$ et U le sont également.

Définition. On dit que (V, G) a la propriété de relèvement à l'ordre m si $\varphi : \mathcal{D}^m(V)^G \rightarrow \mathcal{D}^m(V//G)$ est surjective. Si (V, G) satisfait la propriété de relèvement à tous les ordres on dira que (V, G) a la propriété de relèvement.

Notons, qu'avec les notations de 2.1., on peut évidemment remplacer $\mathcal{D}^m(V)^G$ par U^m dans cette définition et que la propriété de relèvement équivaut à $\varphi : U \rightarrow \mathcal{D}(V//G)$ est un isomorphisme filtré.

Remarques. (a) Si $Q \in \mathcal{D}(V//G)$ et s'il existe $P \in \mathcal{D}^m(V)$ tel que $P = Q$ sur $\mathcal{O}(V)^G$ alors il existe $D \in \mathcal{D}^m(V)^G$ tel que $\varphi(P) = Q$ (on écrit $\mathcal{D}^m(V) = \mathcal{D}^m(V)^G \oplus \mathcal{D}^m(V)_G$ où $\mathcal{D}^m(V)_G$ est un supplémentaire G -stable).

(b) Soit $H = \{g \in G / g \cdot v = v \text{ pour tout } v \in V\}$; alors, si $\overline{G} = G/H, (V, G)$ a la propriété de relèvement (à l'ordre m) si $(V, \overline{G})$ l'a. On peut donc se ramener au cas où l'action est fidèle, i.e. $H = \{1\}$.

(c) Supposons que $\rho : G \rightarrow GL(V)$ soit une représentation linéaire de G . On peut écrire $V = V^G \oplus V_G$ où V^G est l'espace des points fixes et V_G un supplémentaire G -stable. Comme $\mathcal{O}(V)^G$ est un anneau de polynômes sur $\mathcal{O}(V_G)^G$ on voit que (V, G) a la propriété de relèvement (à l'ordre m) si (V_G, G) l'a. Le cas échéant on pourra supposer $V^G = (0)$.

2.3 On conserve les hypothèses de 2.2.

On note G_x le groupe d'isotropie d'un $x \in V$ et V_{ss} l'ensemble $\{v \in V / G \cdot v \text{ fermée dans } V\}$ (points semi-simples). Rappelons que pour tout $x \in V$ il existe une unique orbite fermée dans $\overline{G} \cdot x$. Si $\xi \in V//G$ on note $O(\xi)$ l'unique orbite fermée dans $\pi_V^{-1}(\xi)$. Rappelons quelques résultats tirés de [Lu]. Si L est un sous-groupe (réductif) de G on pose

$$(V//G)_{(L)} = \{\xi \in V//G / \forall x \in O(\xi) G_x \text{ conjugué à } L\}$$

$$V^{(L)} = \pi^{-1}(V//G)_{(L)} = \{v \in V / \overline{G} \cdot v \supset O(\xi), \xi \in (V//G)_{(L)}\}.$$

Les $(V//G)_{(L)}$ forment une stratification finie de $V//G$ et il existe une unique strate, que nous appellerons *strate principale*, $(V//G)_{(C)}$ vérifiant: $(V//G)_{(C)}$ ouvert non vide et $(V//G)_{(L)} \neq \emptyset$ implique C conjugué à un sous-groupe de L .

On notera $\Omega(V//G)$ la strate principale et on pose :

$$\Omega(V, G) = \pi_V^{-1}\Omega(V//G), \quad F(V//G) = V//G - \Omega(V//G),$$

$$F(V, G) = V - \Omega(V, G), \quad \mathcal{A}(V//G) = \mathcal{I}(F(V//G)),$$

$$\mathcal{A}(V, G) = \mathcal{I}(F(V, G)) = \sqrt{\mathcal{A}(V//G)\mathcal{O}(V)}.$$

Rappelons le résultat, ([Lu], III.3. Corollaire 6) :

Proposition. Soit $\xi \in V//G$ alors $\xi \in \Omega(V//G)$ si et seulement si $\pi : V \rightarrow V//G$ est lisse aux points de $O(\xi)$.

Donc s'il l'on pose $V^{\text{lisse}} = \{v \in V / \pi \text{ lisse en } v\}$ on a :

$$\Omega(V//G) = \pi(V_{ss} \cap V^{\text{lisse}}), \quad \Omega(V, G) = \{v \in V / \overline{G}v \supseteq Gx, x \in V_{ss} \cap V^{\text{lisse}}\}.$$

Remarque. Supposons que $\rho : G \rightarrow GL(V)$ soit une représentation linéaire de G , $V = V^G \oplus V_G$ comme en (2.2 Remarque (c)). On vérifie facilement que : $\mathcal{A}(V, G) = \sqrt{\mathcal{A}(V_G, G)\mathcal{O}(V)}$, si $\dim V_G // G = 0$ alors $\Omega(V // G) = V^G // G \cong V^G$, si $\dim V_G // G > 0$ alors $ht \mathcal{A}(V, G) \leq \dim V_G // G$.

2.4 Fixons une représentation linéaire $\rho : G \rightarrow GL(V)$ du groupe réductif G . Le problème du relèvement à l'ordre 1, i.e. celui des champs de vecteurs sur $V // G$, a déjà été étudié, spécialement par G. Schwarz dans [S]. Il est résolu par le théorème suivant dans le cas orthogonalisable :

Théorème [S]. *Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation orthogonalisable de G . L'image de $\varphi : \Theta_V^G \rightarrow \Theta_{V // G}$ est égale à l'ensemble des dérivations laissant stables les idéaux de $\mathcal{O}(V)^G$ constitués des fonctions nulles sur les strates de $V // G$.*

L'exemple de ([S], p. 65), où $G = \mathbf{C}^*$, illustre que ce théorème est en défaut si ρ n'est plus orthogonalisable. Le problème du relèvement dans le cas où G est un tore a été résolu par I. Musson dans [Mu]. Dans le cas où G est fini il a été traité par J.M. Kantor dans [K] (voir aussi [I] et [Le]). Nous reviendrons sur les cas G fini et $G = \mathbf{C}^*$ au §4.

La propriété de relèvement se caractérise facilement lorsque $V // G$ est lisse :

Lemme. *Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ une représentation linéaire avec $V // G$ lisse. Alors (V, G) a la propriété de relèvement à l'ordre 1 si et seulement si $V_{ss} = V^G$.*

Preuve. Compte tenu de (2.2, remarque (c)) on suppose $V^G = (0)$. Dans ce cas $V_{ss} = (0)$ équivaut à $\mathcal{O}(V)^G = \mathbf{C}$. Supposons $\mathcal{O}(V)^G = \mathbf{C}[q_1, \dots, q_\ell]$ avec $\ell \geq 1$, $q_1, \dots, q_\ell$, polynômes sur V algébriquement indépendants, que l'on peut prendre de degré ≥ 2 sans terme de degré ≤ 1 . Si $D \in \Theta_V$ alors $D * q_j(0) = 0$ donc il ne peut exister de relèvement de $\frac{\partial}{\partial q_j} \in \Theta_{V // G}$. La réciproque est triviale.

Donnons un exemple montrant que le relèvement à l'ordre 1 ne suffit pas à assurer le relèvement aux ordres supérieurs.

Exemple. Soit $(V, G) = (\mathbf{C}^3, \mathbf{C}^*)$, G opérant linéairement avec les poids 1, 1, -2. Si $\mathcal{O}(V) = \mathbf{C}[T_1, T_2, T_3]$ on a $\mathcal{O}(V)^G = \mathbf{C}[T_3 T_2^2, T_3 T_1^2, T_3 T_1 T_2]$. Le $\mathcal{O}(V)^G$ -module $\Theta_{V // G}$ est engendré par les restrictions des $T_i \frac{\partial}{\partial T_j}$, $1 \leq i, j \leq 2$. Soit $P = \frac{1}{2T_3} \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \in \mathcal{D}er^2(V // G)$, il n'existe pas d'élément de

$\text{Der}^2(V)$ envoyant $T_3T_2^2$ sur 1, donc il y a relèvement à l'ordre 1 mais pas à l'ordre 2.

2.5 Soit $\rho : G \rightarrow GL(V)$ comme en 2.4. Si $v \in V_{ss}$ de stabilisateur G_v , notons N un supplémentaire G_v -stable de l'espace tangent $T_v(G \cdot v)$ dans $V \cong T_v V$. La représentation de G_v dans N est appelée représentation slice. Le résultat qui suit étend celui démontré pour l'ordre 1 dans [S] ; comme sa preuve est tout à fait semblable et que nous n'aurons pas à l'utiliser nous le donnerons sans démonstration.

Lemme. Soient (V, G) et $v \in V_{ss}$ comme ci-dessus. Alors si (V, G) a la propriété de relèvement à l'ordre m il en est de même pour la représentation slice (N, G_v) .

Remarque. Si $\xi \in \Omega(V//G)$ et $v \in O(\xi)$ la représentation slice (N, G_v) vérifie $N_{ss} = N^{G_v}$. Il résulte alors de (2.4, lemme) et du théorème du slice étale de Luna qu'il existe un ouvert affine W contenant v , G -stable, tel que (W, G) ait la propriété de relèvement, (cf. 3.5 preuve de la proposition).

3. Condition suffisante pour le relèvement

3.1 On fixe une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini intègre A et l'on note $\mathcal{D}$ l'anneau $\mathcal{D}(A)$ de 1.1. On suppose donnée une $\mathbb{C}$ -algèbre filtrée $U = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} U^m$ telle que :

- $U^m = (0)$ si $m < 0$, $U^0 = A$, $U^m \subset U^{m+1}$.
- U^m est un A -module de type fini.
- $gr U = \bigoplus_m \frac{U^m}{U^{m-1}}$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre commutative de type fini.
- Il existe un homomorphisme d'anneaux filtrés $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$, injectif, tel que φ soit un isomorphisme de $U^0 = A$ sur $\mathcal{D}^0 = A$.

Un exemple d'une telle situation est donné par $U = \frac{\mathcal{D}(V)^G}{J}$ comme en 2.1.

Posons, comme d'habitude, $gr_m : U^m \rightarrow gr_m U := \frac{U^m}{U^{m-1}}$ et $gr \varphi : gr U \rightarrow gr \mathcal{D}$ défini par $gr \varphi(gr_m u) = gr_m \varphi(u)$.

Le noyau $K = \text{Ker}(gr \varphi)$ est un idéal gradué égal à $\bigoplus_m K_m$ où $K_m = \{gr_m u \in gr_m U / \varphi(u) \in \mathcal{D}^{m-1}\}$. On a $K_0 = K \cap A = (0)$. On pose $\overline{gr_m U} = \frac{gr_m U}{K_m}$ et $\overline{gr U} = \frac{gr U}{K} = \bigoplus_m \overline{gr_m U}$, de sorte que $gr \varphi$ induit un morphisme gradué injectif de $\overline{gr U}$ dans $gr \mathcal{D}$. Notons que K est un idéal premier et que les éléments de A sont ad-localement nilpotents dans U puisqu'ils le sont dans $\mathcal{D}$ et que φ est injective. On a les lemmes élémentaires :

Lemme 1. *Le morphisme $gr\varphi$ est surjectif si et seulement si $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ est un isomorphisme d'anneaux filtrés. Dans ce cas $K = (0)$.*

Lemme 2. *Soit $S \subset A \setminus (0)$ une partie multiplicative. Alors :*

(i) *S est une partie de Ore dans U . Dans $S^{-1}U$ on a $S^{-1}U^m = U^m S^{-1}$.*

(ii) *L'anneau $S^{-1}U$ est filtré par les $S^{-1}A$ -modules $(S^{-1}U)^m := S^{-1}U^m$. Si $T = \varphi(S) \subset A$ il existe un morphisme injectif d'anneaux filtrés $S^{-1}\varphi : S^{-1}U \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$ défini par*

$$(S^{-1}\varphi)(s^{-1}u) = \varphi(s)^{-1}\varphi(u).$$

(iii) *Le morphisme gradué associé à $S^{-1}\varphi$ s'identifie au morphisme localisé de $gr\varphi$:*

$$S^{-1}gr\varphi : S^{-1}grU \rightarrow T^{-1}gr\mathcal{D} = grT^{-1}\mathcal{D}.$$

De plus $S^{-1}K = \text{Ker}(S^{-1}gr\varphi)$.

3.2 On prend $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant les hypothèses de 3.1. Soit $S \subset A \setminus (0)$ multiplicative telle que $S^{-1}A$ soit régulier et $T^{-1}\varphi(U^1) = T^{-1}\mathcal{D}^1$ où $T = \varphi(S)$.

Lemme 1. *Le morphisme $S^{-1}\varphi : S^{-1}U \rightarrow T^{-1}\mathcal{D}$ est un isomorphisme d'anneaux filtrés. En particulier $S^{-1}K = (0)$.*

Preuve. Il suffit de prouver la première assertion, cf. (3.1, lemme 2). Comme $T^{-1}A$ est régulier on a $T^{-1}\mathcal{D}^m = (T^{-1}\mathcal{D}^1)(T^{-1}\mathcal{D}^1) \dots (T^{-1}\mathcal{D}^1)$ (m fois) et de $T^{-1}\varphi(U^1) = T^{-1}\mathcal{D}^1$ on tire $T^{-1}\mathcal{D}^m = (S^{-1}\varphi)(S^{-1}U^m)$.

Dans tout ce qui suit nous considérerons $\mathcal{D}$, resp. $gr\mathcal{D}$, comme un U , resp. grU ou $\overline{grU}$, module via φ , resp. $gr\varphi$. On pose $R = gr\varphi(grU)$.

Lemme 2. *Mêmes hypothèses. Soit $x \in gr\mathcal{D}$ et $M = \frac{R+Rx}{R} \subset \frac{gr\mathcal{D}}{R}$. Alors le grU -module M vérifie $S^{-1} \cdot M = (0)$.*

Preuve. Par (3.1, lemme 2) et le lemme 1, on a : $T^{-1}R = (S^{-1}gr\varphi)(grU) = gr(T^{-1}\mathcal{D}) = T^{-1}gr\mathcal{D}$. Donc $T^{-1}M \subset T^{-1}(\frac{gr\mathcal{D}}{R}) = (0)$ et l'assertion.

3.3 Soit $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ comme en 3.1. Conformément à 3.2 nous allons considérer $\frac{\mathcal{D}^1}{\varphi(U^1)}$ comme un A -module via $\varphi : a \cdot [D + \varphi(U^1)] =$

$[\varphi(a)D + \varphi(U^1)]$, $a \in A$, $D \in \mathcal{D}^1$. Définissons un fermé de $Z = \text{Spéc } A$ par $F = \text{Sing } Z \cup \text{Supp}_Z \frac{\mathcal{D}^1}{\varphi(U^1)}$ (où Supp_Z est le support). On note $\Omega = Z \setminus F$, $\mathcal{A} = \mathcal{I}(F)$.

Remarquons que $\Omega = \{\mathcal{P} \in Z/\mathcal{P} \in \text{Reg } Z \text{ et } T^{-1}\varphi(U^1) = T^{-1}\mathcal{D}^1 \text{ où } T = \varphi(A \setminus \mathcal{P})\}$.

Proposition 1. *Soit $x \in \text{gr } \mathcal{D}$ et $M = \frac{R+Rx}{R}$. Il existe $\nu \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{A}^\nu \cdot M = (0)$.*

Preuve. Soit $\bar{x} = [x + R]$, on a $A \cdot \bar{x} \subset R \cdot \bar{x} = M$ avec $\text{ann}_A A \cdot \bar{x} = \text{ann}_A M$ (ann_A étant l'annulateur dans A). Par (3.2, lemme 2) on a $\text{Supp}_Z A \cdot \bar{x} = \mathcal{V}(\text{ann}_A M) \subset F = \mathcal{V}(\mathcal{A})$, d'où le résultat.

Pour toute $\mathbb{C}$ -algèbre B on note $\text{GKdim } B$ sa dimension de Gelfand-Kirillov, cf [Kr-L]; rappelons que si B est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini ce n'est autre que la dimension de Krull de B .

Proposition 2. *Si $\Omega \neq \emptyset$ alors $\dim \text{gr } U = \text{GKdim } U = 2\dim A$ et K est un idéal premier minimal de $\text{gr } U$.*

Preuve. Comme $\Omega \neq \emptyset$ il existe $S \subset A \setminus (0)$ telle que $S^{-1}\overline{\text{gr } U} = S^{-1}(\frac{\text{gr } U}{K}) = S^{-1}\text{gr } U \xrightarrow{\sim} S^{-1}\text{gr } \mathcal{D}$, cf (3.2 lemme 1).

Rappelons que $\text{GKdim } \mathcal{D} = \text{GKdim } \text{gr } \mathcal{D} = 2\dim A$, donc $\text{GKdim } \overline{\text{gr } U} = 2\dim A \leq \text{GKdim } \text{gr } U$. Mais $\text{GKdim } \text{gr } U \leq \text{GKdim } U$, cf ([Kr-L], p. 75), et $\text{GKdim } U \leq \text{GKdim } \mathcal{D}$ implique les assertions.

3.4 On conserve les notations des sections précédentes.

Proposition. *Soit $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant les hypothèses de 3.1. On suppose de plus :*

(i) $\overline{\text{gr } U}$ vérifie la condition (S_2)

(ii) $\dim \frac{\overline{\text{gr } U}}{\mathcal{A}_{\text{gr } U}} \leq \dim \overline{\text{gr } U} - 2$.

Alors $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D}$ est un isomorphisme d'anneaux filtrés (et $K = (0)$).

Preuve. Notons que $\Omega \neq \emptyset$, sinon $\mathcal{A} = (0)$ contredisant (ii).

Soit $x \in \text{gr } \mathcal{D}$ et $M = \frac{R+Rx}{R}$, $R = \text{gr}\varphi(\text{gr } U)$ comme en 3.2. Par (3.3, proposition 1) on a $\mathcal{A}^\nu \overline{\text{gr } U} \subset \text{ann}_{\overline{\text{gr } U}} M$, donc $\dim_{\overline{\text{gr } U}} M \leq \dim(\frac{\overline{\text{gr } U}}{\mathcal{A}_{\text{gr } U}}) \leq \dim \overline{\text{gr } U} - 2$.

Remarquons que par (3.2, lemme 1) R et $\text{gr } \mathcal{D}$ ont même corps de fractions et par ce qui précède $\dim_R \frac{(R+Rx)}{R} \leq \dim R - 2$. La condition

(S_2) sur $R \cong \overline{gr U}$ assure alors $x \in R$. Donc $gr\varphi$ est surjective et on conclut par (3.1, lemme 1).

Remarques. (a) On a toujours $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}(\text{Sing } Z)$. Si φ est un isomorphisme d'anneaux filtrés il y a égalité.

(b) Il n'est pas difficile de voir que les conditions (i) et (ii) de la proposition impliquent $\overline{gr U}$ normal.

3.5 Nous allons appliquer ce qui précède à $U = \frac{\mathcal{D}(V)^G}{J}$ où (V, G) est comme en 2.1. Rappelons que $\varphi : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow \mathcal{D}(V//G)$ est le morphisme de restriction et que $J = \text{Ker } \varphi$. On note encore $\varphi : U \hookrightarrow \mathcal{D} := \mathcal{D}(V//G)$ l'application induite. Ici $A = \mathcal{O}(V)^G$ et $Z = \text{Spec } A$, cf 3.3, n'est autre que $V//G$. On dispose de deux ouverts dans $V//G : \Omega(V//G)$, la strate principale, et l'ouvert Ω défini en 3.3.

Proposition. *On a $\Omega = \Omega(V//G)$, en particulier $\Omega \neq \emptyset$.*

Preuve. Si p est un point fermé de $V//G$ on désigne par U_p^1 et $\mathcal{D}_p^1$ les localisés correspondants des $\mathcal{O}(V)^G$ -modules U^1 et $\mathcal{D}^1$. On peut réécrire la définition de Ω sous la forme :

$$\begin{aligned}\Omega &= \{p \in \text{Reg } V//G / \varphi(U_p^1) = \mathcal{D}_p^1\} \\ &= \{p \in \text{Reg } V//G / \varphi(\Theta_V^G)_p = (\Theta_{V//G})_p\}.\end{aligned}$$

Puisque π est surjective il s'agit de prouver que $\pi^{-1}\Omega = \Omega(V, G) = \{v \in V/\pi \text{ lisse aux points de } \mathcal{O}(\pi(v))\}$, cf (2.3., proposition). Rappelons que $x \in V^{\text{lisse}}$ équivaut à $\xi = \pi(x) \in \text{Reg } V//G$ et $d\pi_x : T_x V \rightarrow T_\xi V//G$ surjective ; V^{lisse} est un ouvert G -stable de V . Pour simplifier posons $A = \mathcal{O}(V)^G$, $B = \mathcal{O}(V)$.

Soit $v \in \Omega(V, G)$, $\xi = \pi(v) = \pi(x)$ avec $x \in V_{ss} \cap V^{\text{lisse}}$. Puisque Gx et $V \setminus V^{\text{lisse}}$ sont deux fermés G -stables disjoints il existe $f \in A$ valant 0 sur $V \setminus V^{\text{lisse}}$ et 1 sur Gx . Donc $V_f = \text{Spec } B_f$ est un ouvert affine G -stable contenu dans V^{lisse} et contenant x . Le comorphisme $\pi_f : V_f \rightarrow V_f//G$ de l'inclusion $A_f = B_f^G \hookrightarrow B_f$ est alors lisse ; on en déduit aisément la surjectivité de l'application de restriction $\text{Der}^1(B_f)^G \rightarrow \text{Der}^1(A_f)$. Comme $\xi = \pi(x)$ est dans $V_f//G$ il en découle $U_\xi^1 = \frac{\mathcal{D}^1(B)_\xi^G}{J_\xi} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^1(A_\xi)$, prouvant $\xi \in \Omega$ et $v \in \pi^{-1}\Omega$.

Réciproquement soit $v \in \pi^{-1}\Omega$ et $x \in V_{ss}$ tel que $\pi(v) = \pi(x) = \xi$. Par hypothèse $\xi \in \text{Reg } V//G$ il s'agit donc de prouver que $d\pi_x : T_x V \rightarrow$

$T_{\xi}V//G$ est surjective. Cette application s'identifie à l'application naturelle entre dérivations ponctuelles :

$$\frac{\mathcal{D}er^1(B_x)}{\mathcal{M}_x \mathcal{D}er^1(B_x)} \longrightarrow \frac{\mathcal{D}er^1(A_{\xi})}{\mathcal{M}_{\xi} \mathcal{D}er^1(A_{\xi})}.$$

Puisque $\xi \in \Omega$ et $A \setminus \mathcal{M}_{\xi} \subset B \setminus \mathcal{M}_x$, l'application $\mathcal{D}er^1(B)_{\xi}^G \rightarrow \mathcal{D}er^1(A_{\xi})$ est surjective et $\mathcal{D}er^1(B)_{\xi}^G \subset \mathcal{D}er^1(B_x)$. Par conséquent $d\pi_x$ est surjective.

Remarque. Par (3.4, remarque (a)), pour que (V, G) ait la propriété de relèvement il est nécessaire que $\Omega(V//G) = \text{Reg } V//G$. L'exemple de 2.4 montre que cela ne suffit pas.

Signalons le corollaire qui suit, découlant facilement de la proposition et de (3.3, proposition 2).

Corollaire. *Il y a équivalence entre :*

- (i) (V, G) a la propriété de relèvement.
- (ii) $\varphi : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow \mathcal{D}(V//G)$ est surjective et $gr J$ est un idéal premier de $gr \mathcal{D}(V)^G$.

3.6 Nous pouvons donner la condition suffisante pour le relèvement :

Théorème. *Soient $(V, G), U = \frac{\mathcal{P}(V)^G}{J}, K \subset gr U$ comme en 2.1. On suppose :*

(i) $\overline{gr U} = \frac{gr U}{K}$ vérifie la condition (S_2) .

(ii) $\dim \frac{\overline{gr U}}{\mathcal{A}(V//G)_{gr U}} \leq \dim \overline{gr U} - 2$.

Alors (V, G) a la propriété de relèvement.

Preuve. Compte tenu de (3.5, Proposition) et de la définition de $\mathcal{A}(V//G)$ il suffit d'appliquer (3.4, Proposition).

Remarque. Rappelons que si (i) et (ii) sont satisfaits alors $gr U$ est un anneau normal et $\Omega(V//G) = \text{Reg } V//G$, cf. (3.4, Remarques) et (3.5, corollaire).

Problème. L'inclusion $gr J \subset K$ est évidente, a-t-on toujours $gr J = K$? De manière équivalente : si $D \in \mathcal{D}^m(V)^G$ est tel que D restreint à $\mathcal{O}(V)^G$ est d'ordre $\leq m-1$, a-t-on $D \in \mathcal{D}^{m-1}(V)^G + J$?

Le corollaire de 3.5 montre que la réponse est positive si (V, G) a la propriété de relèvement.

4. Exemples : G fini et $G = \mathbf{C}^*$

4.1 Soit (V, G) comme en 2.1. Si (V, G) a la propriété de relèvement alors $\mathcal{A}(V//G) = \mathcal{I}(\text{Sing } V//G)$ est de hauteur ≥ 2 , car $V//G$ est normale, mais cela n'implique en général pas $ht \mathcal{A}(V, G) \geq 2$, cf (2.4, exemple). Nous allons voir que si G est fini ou $\mathbf{C}^*$ alors cette dernière condition assure la propriété de relèvement.

4.2 On suppose ici G fini opérant sur $B = \mathcal{O}(V)$, $\mathbf{C}$ -algèbre de type fini régulière. On suppose, cf (2.2, remarque (b)), que $G \subset \text{Aut}_{\mathbf{C}} B$. Soient $A = B^G$ et $\pi : V \rightarrow V//G$; rappelons que π est fini et que $V_{ss} = V$. L'ensemble $V_{ss} \cap V^{\text{lisse}}$ coïncide avec V^{et} l'ouvert des points où π est étale.

On retrouve le résultat connu, cf. 2.4. :

Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, il y a équivalence entre (i) (V, G) a la propriété de relèvement et (ii) $\text{codim}(V \setminus V^{\text{et}}) \geq 2$. Si $G \hookrightarrow GL(V)$ est une représentation linéaire fidèle ces conditions sont équivalentes à (iii) G ne contient pas de pseudo réflexion ($\neq 1$).*

Preuve. On remarque $J = \text{Ker } \varphi = (0)$, cf ([Le], théorème 5, p. 171). Alors $U = \mathcal{D}(V)^G$, $gr U = gr \mathcal{D}(V)^G$ est normal.

Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V//G)$ on a : $\mathcal{A}(V, G) = \sqrt{\mathcal{A}B}$, $\mathcal{V}(\mathcal{A}(V, G)) = V \setminus V^{\text{et}}$, $ht \mathcal{A} = ht \mathcal{A}(V, G) = ht \mathcal{A} gr \mathcal{D}(V) = ht \mathcal{A} gr U$. Ceci montre que (i) implique (ii), cf 4.1. Inversement (ii) signifie $ht \mathcal{A} gr U \geq 2$ d'où (i) par (3.6, théorème). L'équivalence de (ii) et (iii) est classique.

4.3 On suppose ici que $G = \mathbf{C}^*$ et que $G \hookrightarrow GL(V)$ est une représentation linéaire fidèle. On choisit une base de V de sorte que $\mathcal{O}(V) = \mathbf{C}[T] = \mathbf{C}[T_1, \dots, T_s]$ et $g \cdot T_j = g^{a_j} T_j$ avec $a_j \in \mathbf{Z}$. Soit $\partial_j = \partial/\partial T_j$, τ_j le symbole de ∂_j de sorte que $\mathcal{D}(V) = \mathbf{C}[T, \partial] = \mathbf{C}[T_1, \dots, T_s, \partial_1, \dots, \partial_s]$, $gr \mathcal{D}(V) = \mathbf{C}[T, \tau] = \mathbf{C}[T_1, \dots, T_s, \tau_1, \dots, \tau_s]$. L'image de l'algèbre de Lie de G dans Θ_V est $\mathbf{C}\theta$ où $\theta = \sum_j a_j T_j \partial_j$, donc θ est central dans $\mathcal{D}(V)^G$ et $\sigma = \sum_j a_j T_j \tau_j$ est le symbole de θ .

Lemme. *Supposons $\dim V//G = \dim V - 1$. Alors $J = \text{Ker } \varphi = \mathcal{D}(V)^G \theta$, $K = \text{Ker}(gr \varphi) = gr J = \sigma \cdot gr \mathcal{D}(V)^G$, et $gr U = \overline{gr U}$ vérifie la condition (S_2) .*

Preuve. La première assertion résulte de ([Mu], Theorem 4.4). La seconde vient de la première et du fait que $gr \mathcal{D}(V)^G = \mathbb{C}[T, \tau]^G$ est de Cohen-Macaulay.

Théorème. Soit $G \hookrightarrow GL(V)$ une représentation linéaire fidèle de $G = C^*$. Si $ht \mathcal{A}(V, G) \geq 2$ alors (V, G) a la propriété de relèvement.

Preuve. On voit facilement que l'on peut supposer $V^G = (0)$, $\dim V \geq 2$, et $\dim V//G = \dim V - 1$. Donc en particulier $a_j \neq 0$ pour tout j , si l'on adopte les notations précédentes. Le fermé $F(V, G) = V - \Omega(V, G)$ est stable sous l'action du groupe des matrices diagonales de $GL(s, \mathbb{C})$, ce qui implique que les idéaux premiers minimaux sur $\mathcal{A}(V, G)$ sont de la forme $\mathcal{P}_E = (T_i; i \in E) \mathbb{C}[T]$ où $E \subset \{1, \dots, s\}$ (l'inclusion est stricte car $ht \mathcal{A}(V, G) \leq \dim V//G$, cf. 2.3). Comme $\sigma \notin \mathcal{P}_E$, pour E comme ci-dessus, on en déduit que si $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V//G)$:

$$\begin{aligned} ht(\mathcal{A}, \sigma) \mathbb{C}[T, \tau]^G &\geq ht(\mathcal{A}, \sigma) \mathbb{C}[T, \tau] = ht(\mathcal{A}(V, G), \sigma) \mathbb{C}[T, \tau] \\ &= ht \mathcal{A}(V, G) + 1 \geq 3. \end{aligned}$$

Le lemme précédent permet alors d'appliquer (3.6, Théorème) pour avoir le résultat.

Remarques. (a) Dans les hypothèses du théorème on peut montrer que la condition $ht \mathcal{A}(V, G) \geq 2$ est nécessaire.

(b) Rappelons que [Mu] donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que (V, G) ait la propriété de relèvement, ceci lorsque G est un tore quelconque.

5. Opérateurs différentiels sur les anneaux classiques d'invariants

5.1 On fixe une $\mathbb{C}$ -algèbre U munie d'une filtration $\{U^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ croissante, exhaustive et discrète :

$$U^m = 0 \text{ si } m < 0; \mathbb{C} \subset U^0 \subset U^1 \subset \dots \subset U^m \subset \dots; U = \bigcup_{m \geq 0} U^m$$

On suppose également que U est graduée par $\{U_\ell\}_{\ell \in \mathbb{Z}} : U = \bigoplus_{\ell} U_\ell$, $\mathbb{C} \subset U_0$.

On fait dans ce qui suit l'hypothèse que la filtration et la graduation sont compatibles, c'est à dire :

$$\forall m \geq 0, U^m = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} (U^m \cap U_\ell).$$

On pose alors : $U_\ell^m = U^m \cap U_\ell$ et pour tout $d \in \mathbf{Z}$, $U(d) = \bigoplus_{\ell \in \mathbf{Z}} U_\ell^{d-\ell}$.

Notons que $U_k^m U_\ell^n \subset U_{k+\ell}^{m+n}$ et que $U(d) = \sum_{\ell+m=d} U_\ell^m$. Il est facile de vérifier que $\{U(d)\}_{d \in \mathbf{Z}}$ est une filtration croissante, exhaustive et séparée sur U .

Aux deux filtrations $\{U^m\}_m$ et $\{U(d)\}_d$ sont associés deux anneaux gradués notés respectivement $gr U$ et $\sigma(U)$. On écrit

$$\begin{aligned} gr U &= \bigoplus_m gr_m U & gr_m : U^m &\rightarrow gr_m U = \frac{U^m}{U^{m-1}} \\ \sigma(U) &= \bigoplus_d \sigma_d(U), & \sigma_d : U(d) &\rightarrow \sigma_d(U) = \frac{U(d)}{U(d-1)}. \end{aligned}$$

Dans les exemples que nous rencontrerons on a $U(d) = 0$ si $d < 0$, cf. 5.2. Si $a \in U^m \setminus U^{m-1}$ et $a \in U(d) \setminus U(d-1)$ on pose $\text{ord } a = m$ et $\text{ord}_\sigma a = d$. Signalons que si $a = \sum_\ell a_\ell$, $a_\ell \in U_\ell$, alors $\text{ord}_\sigma a = d$ équivaut à $\text{ord } a_\ell = d - \ell$ pour un ℓ .

Proposition. *Il existe un isomorphisme d'algèbres, $\phi : \sigma(U) \rightarrow gr U$, défini sur $\sigma_p(U)$ par :*

$$\forall a = \sum_\ell a_\ell \in U(p), a_\ell \in U_\ell^{p-\ell}, \phi(\sigma_p(a)) = \sum_{\text{ord } a_\ell = p-\ell} gr_{p-\ell}(a_\ell)$$

et prolongé par linéarité à $\sigma(U)$.

Preuve. On définit ϕ sur $\sigma_p(U)$ de la manière suivante. Soit $a = \sum_\ell a_\ell \in U(p)$ avec $a_\ell \in U_\ell^{p-\ell}$, on pose $\phi(\sigma_p(a)) = \sum_{\text{ord } a_\ell = p-\ell} gr_{p-\ell}(a_\ell)$ alors ϕ est bien définie sur $\sigma_p(U)$ et on étend ϕ par linéarité sur $\sigma(U)$. On a clairement $\phi(1) = 1$, il s'agit de vérifier que ϕ est multiplicative et bijective. La multiplicativité se vérifie sur les produits d'éléments homogènes de $\sigma(U)$ ce qui est suffisant. La surjectivité résulte de ce que si $a \in U^m$, $a = \sum_\ell a_\ell$

avec $a_\ell \in U_\ell^m$, alors $gr_m a = \phi(\sum_\ell \sigma_{m+\ell}(a_\ell))$. Pour prouver l'injectivité

on considère $x = \sum_{i=1}^t \sigma_{p_i}(a^{(i)}) \in \sigma(U)$ où $p_1, \dots, p_t$ sont 2 à 2 distincts

et $a^{(i)} = \sum_{\ell_i} a_{\ell_i}^{(i)} \in U(p_i)$, $a_{\ell_i}^{(i)} \in U_{\ell_i}^{p_i - \ell_i}$. La condition $\phi(x) = 0$ entraîne

$\sum_{p_i - \ell_i = m} a_{\ell_i}^{(i)} \in U^{m-1}$ pour tout m , puis $a_{\ell_i}^{(i)} \in U^{p_i - \ell_i - 1}$ pour tous i et ℓ_i , donc $a^{(i)} \in U(p_i - 1)$ c'est à dire $x = 0$.

Remarque. L'isomorphisme ϕ n'est pas gradué.

5.2 Soient $\mathbb{C}[T] = \mathbb{C}[T_1, \dots, T_s]$ un anneau de polynômes et $d_j \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq j \leq s$. Graduons $\mathbb{C}[T]$ par l'action de $\mathbb{C}^* : \lambda \cdot T_j = \lambda^{d_j} T_j$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $1 \leq j \leq s$.

Soit $\mathcal{I}$ un idéal premier homogène de $\mathbb{C}[T]$ et $A = \frac{\mathbb{C}[T]}{\mathcal{I}} = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$. L'action de $\mathbb{C}^*$ sur A s'étend en une action localement finie sur $\mathcal{D} := \mathcal{D}(A)$; on note $\mathcal{D}_\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$ les composantes isotypiques correspondantes. On a : $\mathcal{D}_\ell = \{D \in \mathcal{D} / D_* A_i \subset A_{i+\ell} \text{ pour tout } i\}$. La filtration par l'ordre $\{\mathcal{D}^m\}_m$ est compatible avec cette graduation (car $\mathcal{D}^m$ est $\mathbb{C}^*$ -stable).

Lorsque $\mathcal{I} = (0)$, $\mathcal{D}$ est égal à l'algèbre de Weyl $\mathbb{C}[T, \partial] = \mathbb{C}[T_j, \partial_j = \partial / \partial T_j; 1 \leq j \leq s]$ et alors :

$$\mathbb{C}[T, \partial]_\ell^m = \left\{ \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} T^\alpha \partial^\beta / a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}, \sum_i d_i \alpha_i - \sum_i d_i \beta_i = \ell, |\beta| \leq m \right\}.$$

Si $\mathcal{I}$ est quelconque $\mathcal{D}$ se représente sous la forme $\frac{II(\mathcal{IC}[T, \partial])}{\mathcal{IC}[T, \partial]}$ où $II(\mathcal{IC}[T, \partial]) = \{a \in \mathbb{C}[T, \partial] / a\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[T, \partial]\}$. Tout élément de $\mathcal{D}_\ell^m$ est alors la classe modulo $\mathcal{IC}[T, \partial]$ d'un élément de $II(\mathcal{IC}[T, \partial]) \cap \mathbb{C}[T, \partial]_\ell^m$.

Remarquons que si $d = \text{Max}_{1 \leq i \leq s} d_i$ alors $\mathbb{C}[T, \partial]_\ell^m = (0)$ pour $\ell + dm < 0$, donc aussi $\mathcal{D}_\ell^m = (0)$.

Prenons $d_j = 1$ pour tout j , i.e. $d = 1$, il vient donc $\mathcal{D}(p) = \bigoplus_\ell \mathcal{D}_\ell^{p-\ell} = (0)$ pour $p < 0$.

Considérons la filtration (par des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels de dimension finie) sur $\mathbb{C}[T, \partial]$ donnée par $F^n \mathbb{C}[T, \partial] = \{\sum a_{\alpha\beta} T^\alpha \partial^\beta / |\alpha| + |\beta| \leq n\}$ et notons $F^n \mathcal{D}$ la filtration induite sur $\mathcal{D}$ grâce à la description précédente. Il est facile de voir que $\mathcal{D}_\ell^m \subset F^{\ell+2m} \mathcal{D}$.

5.3 Nous allons appliquer ce qui précède dans la situation provenant des anneaux classiques d'invariants telle qu'elle est exposée dans [Le-St]

d'après [H]. Nous commencerons par résumer les notations de [Le-St] (à quelques exceptions près).

On se donne une paire réductive duale classique (G, G') formée de deux groupes classiques contenus dans un groupe symplectique $Sp(\tilde{V})$ où $\tilde{V}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel symplectique de polarisation $\tilde{V} = V \oplus V^*$ de sorte que $G' \subset GL(V^*)$. On pose $\mathfrak{sp} = Lie(Sp(\tilde{V}))$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$. La représentation dite "métaplectique" consiste (pour nous) en un homomorphisme $\omega : \mathfrak{sp} \rightarrow \mathcal{D}(V)$ provenant de l'identification de $\mathfrak{sp}$ avec la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{D}(V)$ formée des anti-commutateurs $ab + ba$ d'éléments a, b de $V \oplus V^*$, où V^* et V sont identifiés à des fonctions et champs de vecteurs sur V (respectivement). Comme G est le commutant de G' dans $Sp(\tilde{V})$ on a un homomorphisme, encore noté ω , de $U(\mathfrak{g})$ vers $\mathcal{D}(V)^{G'}$; par [Ho] il est surjectif. En composant avec $\varphi : \mathcal{D}(V)^{G'} \rightarrow \mathcal{D}(V//G')$ on dispose de $\psi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(V//G')$ qui est surjectif si et seulement si φ l'est. Afin d'accorder les notations de [Le.St] avec celles des paragraphes précédents on pose : $J = \text{Ker } \varphi$, $U = \frac{\mathcal{D}(V)^{G'}}{J}$, $\overline{\mathcal{X}_k} = V//G'$, $J_k = \text{Ker } \psi$ (k étant un entier dont la présence sera justifiée ci-après). On a ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\omega} & \mathcal{D}(V)^{G'} \\
 \downarrow & & \searrow \varphi \\
 \frac{U(\mathfrak{g})}{J_k} & \xrightarrow[\omega]{\sim} & U := \frac{\mathcal{D}(V)^{G'}}{J} \hookrightarrow \mathcal{D}(V//G')
 \end{array}$$

Donnons la description de $\overline{\mathcal{X}_k}$:

Cas A. Soient $p \geq q \geq 1$, $k \geq 1$, $G = GL(p+q, \mathbb{C})$, $G' = GL(k, \mathbb{C})$, $V = M_{p,k}(\mathbb{C}) \times M_{k,q}(\mathbb{C})$; $\overline{\mathcal{X}_k} \cong \{M \in M_{p,q}(\mathbb{C}) / \text{rg } M \leq k\}$.

Cas B. Soient $n \geq 1$, $k \geq 1$, $G = Sp(2n, \mathbb{C})$, $G' = O(k, \mathbb{C})$, $V = M_{k,n}(\mathbb{C})$; $\overline{\mathcal{X}_k} \cong \{M \in M_n(\mathbb{C}) / M \text{ symétrique, } \text{rg } M \leq k\}$.

Cas C. Soient $n \geq 1$, $k \geq 1$, $G = O(2n, \mathbb{C})$, $G' = Sp(2k, \mathbb{C})$, $V = M_{2k,n}(\mathbb{C})$; $\overline{\mathcal{X}_k} \cong \{M \in M_n(\mathbb{C}) / M \text{ antisymétrique, } \text{rg } M \leq 2k\}$.

Dans chaque cas l'action de G' sur V est "naturelle", i.e. par translation à gauche (ou à droite, cas A). On a $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{X}_k}) = \mathcal{O}(V)^{G'}$. Nous sup-

poserons désormais $\overline{\mathcal{X}_k}$ non lisse, ce qui équivaut à : $\{1 \leq k \leq q-1$, cas A ; $1 \leq k \leq n-1$, cas B ; $1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$, cas C} c'est à dire k "suffisamment petit" au sens de [Le-St]. L'anneau $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{X}_k})$ est isomorphe à $A = \frac{\mathbb{C}[Z]}{I}$ où $Z = \{Z_1, \dots, Z_n\}$ sont les fonctions coordonnées canoniques sur $M_{p,q}(\mathbb{C})$, $M_n(\mathbb{C})$ (selon le cas) et où I est un idéal homogène de $\mathbb{C}[Z]$ lorsque chaque Z_i est affecté du degré 1. D'autre part $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{X}_k}) = \mathcal{O}(V)^{G'}$ est engendré comme sous-anneau de $\mathcal{O}(V)$ par $f_1, \dots, f_N$ avec $f_i \in S^2(V^*)^{G'}$ (cf [Ho]). Si l'on convient de poser $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) \cong \mathcal{D}(\overline{\mathcal{X}_k})$, l'application $\varphi : \mathcal{D}(V)^{G'} \rightarrow \mathcal{D}$ restreinte à $\mathcal{O}(V)^{G'}$ est l'isomorphisme envoyant f_i sur la classe de Z_i modulo I . L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ se décompose en $\mathfrak{r}^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}^+$ où $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{r}^+$ est une sous-algèbre parabolique à radical $\mathfrak{r}^+$ abélien. Si l'on pose $J_k \cap U(\mathfrak{r}^-) = I_k$ alors ω induit un isomorphisme $\frac{U(\mathfrak{r}^-)}{I_k} \rightarrow \mathcal{O}(V)^{G'}$ qui composé avec φ fournit un isomorphisme $\psi : \frac{U(\mathfrak{r}^-)}{I_k} \rightarrow A = \frac{\mathbb{C}[Z]}{I}$, cf ([Le-St], chap. II). Rappelons que (comme pour toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$) $U(\mathfrak{g})$ est munie d'une filtration canonique : $F^p U(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} + \mathfrak{g} + \dots + \mathfrak{g}^p$. L'anneau gradué associé $gr^F U(\mathfrak{g})$ s'identifiant à $S(\mathfrak{g})$ (l'algèbre symétrique), donc à $\mathcal{O}(\mathfrak{g}^*)$. A l'idéal $J_k = \text{Ker } \psi$ on associe une variété $\mathcal{V}(J_k) := \mathcal{V}(\sqrt{gr^F J_k})$ dans $\mathfrak{g}^*$. On peut voir que $\mathcal{V}(J_k)$ est normale, cf ([Le-St], chap. II).

Lemme-clé ([Le-St], chap. III, 1.6). *Sous les hypothèses et notations précédentes : l'isomorphisme $\psi : \frac{U(\mathfrak{r}^-)}{I_k} \rightarrow A$ envoie $\frac{I_{k-1}}{I_k}$ sur $\mathcal{I}(\text{Sing } \overline{\mathcal{X}_k})$ et on a*

$$\dim \frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k} + I_{k-1} S(\mathfrak{g})} \leq \dim \frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k}} - 2$$

Signalons que I_{k-1} étant un idéal homogène de $U(\mathfrak{r}^-) = S(\mathfrak{r}^-)$, on l'identifie à $gr^F I_{k-1}$ dans $S(\mathfrak{g}) = gr^F U(\mathfrak{g})$.

5.4 Un des buts de [Le-St] est de prouver la surjectivité de ψ (i.e. de φ). La preuve comporte trois étapes :

(a) le lemme clé de 5.3

(b) un lemme (attribué à O. Gabber), cf ([Le-St], chap. III, 1.8) qui grâce à (a) implique que $\mathcal{D}$ est un U -module de type fini.

(c) la maximalité de J_k , ([Le-St], chap. IV), ce qui utilise la théorie des idéaux primitifs.

Nous allons montrer que (3.6, théorème) permet de retrouver cette surjectivité sans avoir à utiliser (b) et (c) ; le (a) nous restant nécessaire.

5.5 Sur $\mathcal{D}(V)$ on dispose de la filtration par l'ordre $\{\mathcal{D}^m(V)\}_m$ et de la graduation $\{\mathcal{D}_\ell(V)\}_\ell$ provenant de celle de $\mathcal{O}(V) = S(V^*) = \bigoplus S^i(V^*)$ avec $S^i(V^*) = \mathcal{O}(V)_i$. Sur l'algèbre $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A)$ on a de même $\{\mathcal{D}^m\}_m$ et $\{\mathcal{D}_\ell\}_\ell$ provenant de $A = \bigoplus A_\ell$ (rappelons que chaque Z_i a le degré 1). Nous utiliserons les notations de 5.1 et 5.2.

Signalons que $\mathcal{O}(V)^{G'} = S(V^*)^{G'} = \mathbb{C}[f_1, \dots, f_N]$, cf 5.3, est un sous anneau gradué de $\mathcal{O}(V)$: $\mathcal{O}(V)^{G'} = \bigoplus_i \mathcal{O}(V)_{2i}^{G'}$ (les f_i sont dans $S^2(V^*)$).

Lemme. $\forall i, \forall m, \varphi(\mathcal{D}_{2i}^m(V)^{G'}) \subset \mathcal{D}_i^m$.

Preuve. Notons que puisque $G' \subset GL(V^*)$ on peut parler de $\mathcal{D}_{2i}^m(V)^{G'}$. La vérification est immédiate lorsqu'on a remarqué que φ envoie $\mathcal{O}(V)_{2i}^{G'}$ sur A_i (car $\varphi(f_i) = Z_i \pmod{I}$).

Corollaire. L'homomorphisme $\psi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}$ vérifie : $\psi(\mathfrak{r}^-) \subset \mathcal{D}_1^0$, $\psi(\mathfrak{r}^+) \subset \mathcal{D}_{-1}^2$, $\psi(\mathfrak{m}) \subset \mathcal{D}_0^1$.

Preuve. Les formules définissant ω , cf ([Le-St], chap IV, 1.9), prouvent que $\omega(\mathfrak{r}^-) \subset \mathcal{D}_2^0(V)^{G'}$, $\omega(\mathfrak{r}^+) \subset \mathcal{D}_{-2}^2(V)^{G'}$, $\omega(\mathfrak{m}) \subset \mathcal{D}_0^1(V)^{G'}$. Il suffit donc d'appliquer le lemme.

5.6 Remarquons que, par (5.5, corollaire), ψ n'est pas un isomorphisme filtré lorsque $U(\mathfrak{g})$, resp. $\mathcal{D}$, est muni de la filtration canonique, resp. $\{\mathcal{D}^m\}_m$. On va montrer que c'est par contre le cas pour $\{\mathcal{D}(p)\}_p$, $\mathcal{D}(p)$ comme en 5.1. Pour $\ell, m \in \mathbb{Z}$ on pose :

$$U_\ell^m(\mathfrak{g}) = \sum_{\substack{\alpha - \beta = \ell \\ \gamma + 2\beta \leq m}} F^\alpha U(\mathfrak{r}^-) F^\gamma U(\mathfrak{m}) F^\beta U(\mathfrak{r}^+)$$

(où $F^\cdot$ est la filtration canonique).

Lemme 1 (a) $\forall p, F^p U(\mathfrak{g}) = \sum_{\ell+m \leq p} U_\ell^m(\mathfrak{g}) = \sum_{\ell+m=p} U_\ell^m(\mathfrak{g})$.

(b) $\omega(U_\ell^m(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'}$ et $\varphi(\mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'}) \subset \mathcal{D}_\ell^m$.

Preuve. (a) est aisé et (b) résulte des propriétés de ω énoncées dans la preuve de (5.5, corollaire).

Lemme 2. $\forall d \in \mathbb{N}, [F^{2d} \mathcal{D}(V)]^{G'} = [F^{2d+1} \mathcal{D}(V)]^{G'} = \omega(F^d U(\mathfrak{g}))$.

Preuve. Rappelons que la filtration $F^* \mathcal{D}(V)$ a été introduite en 5.2. Les égalités sont conséquences directes de ([Ho], Th 1.A et Th. 1.B).

Proposition. On a :

$$\omega(U_\ell^m(\mathfrak{g})) = \mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'}, \quad \omega(F^p U(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\ell} \mathcal{D}_{2\ell}^{p-\ell}(V)^{G'}$$

et

$$\psi(F^p U(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{D}(p) = \bigoplus_{\ell} \mathcal{D}_{\ell}^{p-\ell}.$$

Preuve. En utilisant 5.2 et le lemme 2 on voit que :

$$\mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'} \subset [F^{2\ell+2m} \mathcal{D}(V)]^{G'} = \omega(F^{\ell+m} U(\mathfrak{g}))$$

grâce au lemme 1 on obtient alors

$$\omega(F^p U(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\ell+m=p} \omega(U_\ell^m(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\ell+m=p} \mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'}.$$

Les autres assertions en découlent.

5.7 Rappelons que $\varphi : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow \mathcal{D} := \mathcal{D}(A)$, $J = \text{Ker } \varphi$ et $U = \frac{\mathcal{D}(V)^G}{J}$. On note $p : \mathcal{D}(V)^G \rightarrow U$ la projection et on pose : $U^m = p(\mathcal{D}^m(V)^{G'})$, $U_\ell = p(\mathcal{D}_{2\ell}(V)^{G'})$.

Lemme. L'anneau U est gradué par $\{U_\ell\}_\ell$ et la filtration $\{U^m\}_m$ est compatible avec cette graduation. Si $U(d) = \sum_{\ell+m=d} U_\ell^m$, où $U_\ell^m = U_\ell \cap U^m$, alors : $U(d) = p\omega(F^d U(\mathfrak{g}))$, $U_\ell^m = p\omega(U_\ell^m(\mathfrak{g}))$.

Preuve. Notons que $\mathcal{D}(V)^{G'} = \omega(U(\mathfrak{g})) = \bigoplus_{\ell} \mathcal{D}_{2\ell}(V)^{G'}$, cf (5.6, proposition). Par (5.6, lemme 1) on a $\varphi(U_\ell) \subset \mathcal{D}_\ell$; comme $\mathcal{D} = \bigoplus_{\ell} \mathcal{D}_\ell$ et φ injective sur U il en résulte $U = \bigoplus_{\ell} U_\ell$. La compatibilité résulte de l'égalité $\mathcal{D}^m(V)^{G'} = \bigoplus_{\ell} \mathcal{D}_{2\ell}^m(V)^{G'}$. La dernière assertion est conséquence de (5.6, proposition) et des définitions.

Proposition. L'anneau $gr U = \bigoplus_{m \geq 0} \frac{U^m}{U^{m-1}}$ est isomorphe à $\frac{S(\mathfrak{g})}{gr K J_K}$; il possède un unique idéal premier minimal, égal au noyau K de $gr \varphi : gr U \rightarrow gr \mathcal{D}$. De plus $gr \bar{U} = \frac{gr U}{K}$ est normal.

Preuve. Notons, comme en 5.1, $\sigma(U) = \bigoplus_d \frac{U(d)}{U(d-1)}$. Par le lemme précédent $\omega : \frac{U(\mathfrak{g})}{J_k} \rightarrow U$ est un isomorphisme filtré, U étant muni de $\{U(d)\}_d$ et $\frac{U(\mathfrak{g})}{J_k}$ de la filtration canonique. Grâce à (5.1, proposition) il vient : $\frac{S(\mathfrak{g})}{gr^F J_k} \cong \sigma(U) \cong gr U$. Puisque $\mathcal{V}(J_k) := \mathcal{V}(\sqrt{gr^F J_k})$ est normale, cf 5.3, $\frac{S(\mathfrak{g})}{gr^F J_k}$ n'a qu'un seul idéal premier minimal, $\frac{\sqrt{gr^F J_k}}{gr^F J_k}$, et $\frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k}}$ est normal. Il suffit donc d'utiliser (3.3, proposition 2) et l'isomorphisme précédent.

Remarque. Insistons sur le fait que $\frac{U(\mathfrak{g})}{J_k}$ est filtré par des espaces de dimension finie contrairement aux U^m .

5.8 On retrouve maintenant le résultat (k suffisamment petit) :

Théorème. *Le couple (V, G') a la propriété de relèvement.*

Preuve. On va appliquer (3.6, Théorème), vérifions les hypothèses. Remarquons que $\mathcal{A}(V//G') = \mathcal{I}(\text{Sing } V//G')$; on peut pour cela : soit déterminer la strate principale de $V//G'$, soit raisonner comme dans ([Le-St], chap III, 1.3 et 1.4).

Par (5.7, proposition) on a : $\overline{gr U} \cong \frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k}}$. Le lemme clé de 5.1 et la remarque précédente impliquent :

$$\begin{aligned} \dim \frac{\overline{gr U}}{\mathcal{A}(V//G') \overline{gr U}} &= \dim \frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k} + I_{k-1} S(\mathfrak{g})} \leq \dim \frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J_k}} - 2 \\ &= \dim \overline{gr U} - 2. \end{aligned}$$

Donc (3.6, théorème) fournit le résultat.

On a la conséquence immédiate, cf (3.5, corollaire) :

Corollaire. *On a un isomorphisme $\psi : \frac{U(\mathfrak{g})}{J_k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}(\overline{\mathcal{X}_k})$ et $gr^F J_k$ est premier.*

Remarque. (a) La surjectivité de $\psi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{D}(\overline{\mathcal{X}_k})$ se déduit également d'un résultat plus général dû à A. Joseph, cf [J].

(b) Cette approche ne donne pas la simplicité de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{X}_k})$, i.e. J_k maximal.

(c) Il peut arriver, cf [Le-Sm], qu'un quotient primitif $\frac{U(\mathfrak{g})}{J}$ (en l'occurrence pour $\mathfrak{g}$ de type G_2) soit isomorphe à l'anneau des o.d. sur une

variété (non lisse) avec $gr^F J$ non premier dans $S(\mathfrak{g})$. Ce phénomène est en relation avec la non normalité de $\frac{S(\mathfrak{g})}{\sqrt{gr^F J}}$.

REFERENCES

- [B-H] H. Bass and W. Haboush, *Linearizing certain reductive group actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **292** (1985), 463–482.
- [E.G.A] A Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique. Chap. IV*, Publ. I.H.E.S., **32** (1967).
- [H] R. Howe, *Remarks on classical invariant theory*, preprint.
- [I] Y. Ishihashi, *Nakai's conjecture for invariant subrings*, Hiroshima Math. J. **15** (1985), 429–436.
- [J] A. Joseph, *A surjectivity theorem for rigid highest weight modules*, Inv. Math. **92** (1988), 567–596.
- [K] J.M. Kantor, *Formes et opérateurs différentiels sur les espaces analytiques complexes*, Bull. Soc. Math. France **53** (1977), 5–80.
- [Kr-L] G. Krause and T. Lenagan, *Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov dimension*, Research notes in Math. **116**, Pitman, 1985.
- [Le] T. Levasseur, *Anneaux d'opérateurs différentiels*, Dans Séminaire d'Algèbre P. Dubreil et M.P. Malliavin. Lecture Notes in Math. **867**(1981), Springer Verlag, 157–173.
- [Le-Sm] T. Levasseur and S.P. Smith, *Primitive ideals and nilpotent orbits in type G_2* , J. Algebra **114** (1988), 81–105.
- [Le-St] T. Levasseur and J.T. Stafford, *Rings of differential operators on classical rings of invariants*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. **81** 412, (1989).
- [Lu] D. Luna, *Slices étales*, Bull. Soc. Math. France. Mémoire **33** (1973), 81–105.
- [M.R] J.C. Mc Connell and J.C. Robson, *Non commutative Noetherian Rings*, J. Wiley, New York, 1987.
- [Mu] I. Musson *Rings of differential operators on invariant rings of tori*, Trans. Amer. Math. Soc. **303** (1987), 805–827.
- [S] G. Schwarz, *Lifting smooth homotopies of orbit spaces*, Publ. I.H.E.S. **51** (1980), 37–135.

Received July 19, 1989

Département de Mathématiques et Informatique
 Université de Bretagne Occidentale
 29287 Brest Cedex - France