Orbite nilpotente minimale

Thierry Levasseur et Patrice Tauvel

1. Notations

1.1. Dans toute la suite, $\Bbbk$ est un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique nulle et $\mathfrak{g}$ une $\Bbbk$-algèbre de Lie *simple* de dimension finie et de rang l. Toutes les notions topologiques utilisées sont relatives à la topologie de Zariski sur $\mathfrak{g}$. On désigne par G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ et par K sa forme de Killing. Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\#E$.

1.2. On fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$. Soient R le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, B une base de R, R^+ (resp. R^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) relativement à B. Pour $\alpha \in R$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est l'espace radiciel associé à α. On pose :

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}.$$

Si $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, on note $(\lambda|\mu) = K(H_\lambda, H_\mu)$ où, pour $\nu \in \mathfrak{h}^*$, H_ν est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ vérifiant $K(H_\nu, H) = \nu(H)$ pour tout $H \in \mathfrak{h}$.

1.3. On note θ la plus grande racine de R définie par B, H l'élément de $[\mathfrak{g}^\theta, \mathfrak{g}^{-\theta}]$ vérifiant $\theta(H) = 2$, et E, F des éléments de $\mathfrak{g}^\theta$ et $\mathfrak{g}^{-\theta}$ tels que $[E, F] = H$.

1.4. Dans la suite, l'expression "sous-algèbre parabolique" signifiera "sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ distincte de $\mathfrak{g}$".

Soient Σ une partie non vide de B et $T(\Sigma)$ l'ensemble des racines combinaisons linéaires à coefficients négatifs ou nuls des éléments de $B \backslash \Sigma$. On pose :

$$\mathfrak{p}(\Sigma) = \mathfrak{b} + \sum_{\alpha \in T(\Sigma)} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Alors $\mathfrak{p}(\Sigma)$ est une sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ et toute sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ s'obtient de cette manière ([1], p.89). On notera $l(\mathfrak{g})$ la codimension minimale des sous-algèbres paraboliques.

1.5. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{g}^X$ le centralisateur de X dans $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{O}_X$ la G-orbite de X. On a $\dim \mathcal{O}_X = \operatorname{codim} \mathfrak{g}^X$. Soit $\mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{D}$) l'ensemble des éléments nilpotents (resp. semi-simples) non nuls de $\mathfrak{g}$. On pose :

$$n(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\ X \in \mathfrak{g} \backslash \{0\}\}, \quad \mathcal{S} = \{X \in \mathfrak{g};\ \dim \mathcal{O}_X = n(\mathfrak{g})\},$$
$$n_1(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\ X \in \mathcal{N}\}, \quad n_2(\mathfrak{g}) = \min\{\dim \mathcal{O}_X;\ X \in \mathcal{D}\}.$$

Le but de ce travail est de retrouver, avec des méthodes élémentaires n'utilisant pas les tables des systèmes de racines, les résultats de [4] concernant $\mathcal{S}$. Indiquons aussi pourquoi certaines preuves de [4] à ce sujet sont inexactes. Nous utilisons, dans cet alinéa, les notations des tables de [1], p. 250-275.

Soit $\Gamma = \{\alpha \in R;\ (\alpha|\theta) > 0\}$. Définissons $k(\mathfrak{g})$ par $2k(\mathfrak{g}) = 1 + \#\Gamma$. Dans [4], lemme 3.1, (qui est essentiel pour la preuve du résultat principal du paragraphe 3), il est affirmé :

Si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A_l, et si $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique vérifiant $1 + \operatorname{codim} \mathfrak{p} \leq 2k(\mathfrak{g})$, alors $\mathfrak{p}$ est maximale. En outre, si la racine simple qui définit $\mathfrak{p}$ a un coefficient strictement supérieur à 1 dans θ, alors $1 + \operatorname{codim} \mathfrak{p} = 2k(\mathfrak{g})$.

Ces deux affirmations sont inexactes :

a) Dans une algèbre de type D_4, on obtient $k(\mathfrak{g}) = 5$. Les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}(\alpha_1, \alpha_3)$, $\mathfrak{p}(\alpha_1, \alpha_4)$ et $\mathfrak{p}(\alpha_3, \alpha_4)$ ne sont pas maximales, et ont pour codimension 9. Elles vérifient l'inégalité $1 + \operatorname{codim} \mathfrak{p} \leq 2k(\mathfrak{g})$.

b) Dans une algèbre de type B_3 (resp. B_4), on a $k(\mathfrak{g}) = 4$ (resp. $k(\mathfrak{g}) = 6$). La sous-algèbre parabolique maximale $\mathfrak{p}(\alpha_3)$ (resp. $\mathfrak{p}(\alpha_4)$) est de codimension 6 (resp. 10). Elle vérifie l'inégalité stricte $1 + \operatorname{codim} \mathfrak{p} < 2k(\mathfrak{g})$. Pourtant, α_3 (resp. α_4) a un coefficient égal à 2 dans θ.

2. Les résultats

2.1. Soit $X \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}$. On définit une forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ par

$$K_X(Y, Z) = K(X, [Y, Z]) \qquad (Y, Z \in \mathfrak{g})$$

Le noyau de K_X est $\mathfrak{g}^X$, et la dimension d_X d'un sous-espace totalement isotrope maximal pour K_X est donnée par $2d_X = \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^X$. Un sous-espace totalement isotrope pour K_X est dit subordonné à X. Une polarisation en X est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui est un sous-espace totalement isotrope maximal pour K_X. On dit que X (ou $\mathcal{O}_X$) est polarisable s'il existe une polarisation $\mathfrak{p}$ en X. S'il en est ainsi, $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre parabolique ([3], lemme 1.1) et $\dim \mathcal{O}_X = 2 \operatorname{codim} \mathfrak{p}$.

2.2. Lemme. (i) *Tout élément de $\mathcal{S}$ est ou nilpotent ou semi-simple.*

(ii) *On a $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g}) = n_2(\mathfrak{g})$.*

Preuve. (i) Soient X un élément non nilpotent et non semi-simple de $\mathfrak{g}$, et $X = S + N$ sa décomposition de Jordan avec S semi-simple. On a $\mathfrak{g}^X = \mathfrak{g}^S \cap \mathfrak{g}^N$. Pour montrer que $X \notin \mathcal{S}$, il suffit donc de prouver que $\mathfrak{g}^S \neq \mathfrak{g}^N$.

D'après le théorème de Jacobson-Morosov, il existe $T \in \mathfrak{g}$ tel que $[T, N] = 2N$. Ecrivons $T = \sum_{\lambda \in \Bbbk} T_\lambda$, avec $[S, T_\lambda] = \lambda T_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Bbbk$. Il vient immédiatement $[T_0, N] = 2N$. Ainsi, $T_0 \in \mathfrak{g}^S$ et $T_0 \notin \mathfrak{g}^N$.

(ii) Soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique et X un élément non nul du radical nilpotent de $\mathfrak{p}$. On a $K(X, \mathfrak{p}) = 0$, donc $\mathfrak{p}$ est subordonnée à X. Il en résulte que $\dim \mathfrak{p} \leq d_X$, puis $\dim \mathcal{O}_X \leq 2 \operatorname{codim} \mathfrak{p}$. Par suite, $n_1(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g})$.

Soient S un élément semi-simple non nul de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}_1$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant S, et R_1 le système de racines associé. Alors $R_1' = \{\alpha \in R_1;\ \alpha(S) = 0\}$ est un système de racines dans le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{h}_1^*$ qu'il engendre et, pour toute base B_1' de R_1', il existe une base B_1 de R_1 contenant B_1' ([1], p.165). A G-conjugaison près, on peut supposer $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$, $R_1 = R$, $B_1 = B$. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(B\backslash B_1')$, il vient :

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \sum_{\alpha \in R_1'} \Bbbk H_\alpha + \sum_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On en déduit immédiatement que $\mathfrak{p}$ est une polarisation en S. Alors $d_S = 2 \operatorname{codim} \mathfrak{p}$ et $n_2(\mathfrak{g}) \geq 2l(\mathfrak{g})$.

Soit Σ une partie non vide de B. Il existe un unique élément S de $\mathfrak{h}$ tel que $\alpha(S) = 0$ si $\alpha \in B\backslash\Sigma$ et $\alpha(S) = 1$ si $\alpha \in \Sigma$. On voit alors comme précédemment que $\mathfrak{p}(\Sigma)$ est une polarisation en S, et on en déduit $n_2(\mathfrak{g}) \leq 2l(\mathfrak{g})$.

Compte-tenu de ce qui précède et de (i), on obtient alors $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g})$. □

2.3. Soient N un élément nilpotent non nul et (N, S, M) un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet de $\mathfrak{g}$, avec S semi-simple. A G-conjugaison près, on peut supposer que $N \in \mathfrak{n}$, $S \in \mathfrak{h}$, et $\alpha(S) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\alpha \in B$ ([2], p.164). On a donc $\theta(S) \geq \alpha(S)$ pour tout $\alpha \in R$. On pose :

$$\mathfrak{g}_S(i) = \{X \in \mathfrak{g};\ [S, X] = iX\} \qquad (i \in \mathbb{Z})$$

$$\mathfrak{p}_S = \sum_{i \geq 0} \mathfrak{g}_S(i), \quad \mathfrak{g}_S^2 = \sum_{i \geq 2} \mathfrak{g}_S(i).$$

On a $\mathfrak{g}^\theta \subset \mathfrak{g}_S^2$, et $\mathfrak{p}_S$ est une polarisation en S, donc une sous-algèbre parabolique. D'autre part, compte-tenu des résultats bien connus concernant les représentations de $\mathfrak{sl}(2)$, on a $\dim \mathfrak{g}^N = \dim \mathfrak{g}_S(0) + \dim \mathfrak{g}_S(1)$, et l'application $\mathfrak{p}_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ X \to [X, N]$ est surjective.

2.4. Proposition. *On conserve les notations de* 1.3 *et* 2.3. *Alors* $\mathcal{O}_E$ *est l'unique G-orbite nilpotente de dimension* $n(\mathfrak{g})$ *et, pour tout élément nilpotent non nul* N *de* $\mathfrak{g}$*, on a* $\mathcal{O}_E \subset \overline{\mathcal{O}_N}$.

Preuve. Soit P_S le plus petit sous-groupe algébrique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_S$. Pour $g \in P_S$, on a $g(N) \in \mathfrak{g}_2^S$, d'où une application $P_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ g \to g(N)$ dont la différentielle est l'application surjective $\mathfrak{p}_S \to \mathfrak{g}_S^2,\ X \to [X, N]$. Il vient donc $\mathfrak{g}_S^2 \subset \overline{P(N)} \subset \overline{\mathcal{O}_N}$.

Comme $E \in \mathfrak{g}_S^2$, on a obtenu $\mathcal{O}_E \subset \overline{\mathcal{O}_N}$. Comme toute G-orbite est irréductible et ouverte dans son adhérence, et que $n(\mathfrak{g}) = n_1(\mathfrak{g})$ d'après 2.2, on a obtenu le résultat. □

2.5. Envisageons le cas où $(N, S, M) = (E, H, F)$. Comme $\theta(H) = 2$, on obtient $\alpha(H) \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $\alpha \in R^+$. D'où $\mathfrak{g}_H(i) = \{0\}$ si $i \geq 3$.

Soient $\alpha \in R^+ \backslash \{\theta\}$ vérifiant $\alpha(H) > 0$, et $\beta = \theta - \alpha$. On a $(\theta|\alpha) > 0$, donc $\beta \in R$ ([1], p.148). Comme $2(\theta|\alpha) = (\theta|\theta)$ ([1], p.165), on obtient $\beta(H) > 0$. Par conséquent, $\alpha(H) = \beta(H) = 1$. On en déduit $\mathfrak{g}_H(2) = \Bbbk E$, et $\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_H(0) + \mathfrak{g}_H(1) + \Bbbk E$.

D'autre part, comme $\dim \mathfrak{g}^E = \dim \mathfrak{g}_H(0) + \dim \mathfrak{g}_H(1)$ et $[H, E] = 2E$, il vient $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{g}^E \oplus \Bbbk H$.

2.6. Posons

$$\pi = \{\alpha \in B;\ (\alpha|\theta) > 0\}, \quad \delta = \sum_{\alpha \in B} \alpha.$$

On a $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p}(\pi)$ et $\delta \in R$ ([1], p.160).

Lemme. *On suppose* $l \geq 2$. *Alors :*
(i) *Pour* $\alpha \in B$*, on a* $\alpha(H) \in \{0, 1\}$.
(ii) *On a* $0 < \#\pi \leq 2$ *et* $\#\pi = 2$ *si et seulement si* $\delta = \theta$.

Preuve. (i) Comme $\mathfrak{g}_H(2) = \Bbbk E$, si $\alpha \in B$ vérifie $\alpha(H) = 2$, on obtient $\alpha = \theta$, donc $l = 1$. Contradiction.
(ii) De $\mathfrak{g}_H(2) \neq \{0\}$, on déduit $\pi \neq \emptyset$. Si $\#\pi \geq 3$, on obtient $\delta(H) \geq 3$, ce qui est absurde.
Supposons $\pi = \{\alpha, \beta\}$, avec $\alpha \neq \beta$. D'après (i), on a $\alpha(H) = \beta(H) = 1$, donc $\delta(H) = 2$, et $\delta = \theta$. La réciproque est claire d'après (i). □

2.7. Lemme. (i) *Si* E *est polarisable, alors* $\mathfrak{p}_H \subset \mathfrak{q}$ *pour toute polarisation* $\mathfrak{q}$ *en* E.
(ii) *Si* $\#\pi = 1$ *et* $l \geq 2$, E *n'est pas polarisable et* $n(\mathfrak{g}) < 2l(\mathfrak{g})$.

Preuve. (i) Soit $\mathfrak{q}$ une polarisation en E. On a $K(E,H)=0$ et $K([E,\mathfrak{q}],\mathfrak{q}) = K(E,[\mathfrak{q},\mathfrak{q}]) = 0$. On en déduit que l'élément nilpotent E appartient au radical nilpotent de $\mathfrak{q}$, donc $K(E,\mathfrak{q}) = 0$. Il en résulte que $\mathfrak{q} + \Bbbk H$ est subordonné à E, d'où $H \in \mathfrak{q}$. On sait que $\mathfrak{g}^E \subset \mathfrak{q}$, donc $\mathfrak{p}_H \subset \mathfrak{q}$ d'après 2.5.

(ii) Comme $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p}(\pi)$, si $\#\pi = 1$, $\mathfrak{p}_H$ est une sous-algèbre parabolique maximale de $\mathfrak{g}$. Si E est polarisable, $\mathfrak{p}_H$ est donc l'unique polarisation en E d'après (i). Comme $\mathfrak{p}_H$ est aussi une polarisation en H, on obtient $\dim \mathfrak{g}^H = \dim \mathfrak{g}^E = \dim \mathfrak{g}_H(0) + \dim \mathfrak{g}_H(1)$. Ainsi, $\mathfrak{g}_H(1) = \{0\}$. C'est absurde car, $\#\pi \leq \dim \mathfrak{g}_H(1)$ d'après 2.6.

Si $n(\mathfrak{g}) = 2l(\mathfrak{g})$, toute sous-algèbre parabolique contenant $\mathfrak{b}$ et de codimension $l(\mathfrak{g})$ est une polarisation en E. Contradiction. □

2.8. Il est bien connu (et ceci, sans utiliser les tables des systèmes de racines) que $\delta = \theta$ si et seulement si R est de type A_l. On a donc obtenu le résultat suivant :

Proposition. *Si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type A_l, il existe dans $\mathfrak{g}$ une unique orbite non nulle $\mathcal{O}$ de dimension minimale. Cette orbite est nilpotente et, pour tout élément nilpotent non nul N de $\mathfrak{g}$, on a $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}_N}$.*

2.9. Conservons les notations de 2.5, et supposons $\#\pi = 2$, soit R de type A_l, avec $l \geq 2$. Comme θ est la seule racine positive α telle que $\alpha(H) = 2$, on voit que les éléments de π sont nécessairement les sommets terminaux d'un graphe de Dynkin associé à B. Notons ces sommets α_1, α_l. On a $\mathfrak{p}_H = \mathfrak{p}(\alpha_1, \alpha_l)$. Les seules sous-algèbres paraboliques contenant strictement $\mathfrak{p}_H$ sont $\mathfrak{p}(\alpha_1)$ et $\mathfrak{p}(\alpha_l)$. Elles sont subordonnées à E et ont pour codimension l. D'après 2.7,(i), ce sont donc les seules polarisations en E.

Bibliographie

[1] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie,* Chap. IV-VI, Masson 1981.

[2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie,* Chap. VII-VIII, CCLS Diffusion, 1975.

[3] J. DIXMIER, Polarisations dans les algèbres de Lie II, *Bull. Soc. math. France,* 104, (1976), 145-164.

[4] A. JOSEPH, The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.,* 9 (1976), 1-30.

Université de Poitiers
Département de mathématiques
40, Avenue du Recteur Pineau
86022 Poitiers Cedex, France