

OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES SURFACES MUNIES D'UNE BONNE $\mathbb{C}^*$ -ACTION

Par **Thierry LEVASSEUR**

Département de Mathématiques et Informatique

Université de Bretagne Occidentale

6 Av. V. Le Gorgeu

29287 BREST CEDEX - FRANCE -

"This paper is in final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere".

Abstract : Let $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} R_n$ be a finitely generated normal graded $\mathbb{C}$ -algebra of dimension 2. One studies the ring $\mathcal{D}(R)$ of differential operators over R ; in particular one shows that, most of the time, $\mathcal{D}(R)$ is neither simple nor noetherian. This generalizes results by J. Bernstein - I.N. Gelfand - S.I. Gelfand and J.P. Vigué.

INTRODUCTION

Soient $\mathfrak{X}$ une variété algébrique affine (irréductible) définie sur $\mathbb{C}$, R l'anneau des fonctions régulières sur $\mathfrak{X}$. On désigne par $\mathcal{D}(\mathfrak{X}) = \mathcal{D}(R)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathfrak{X}$, cf. § 0 pour une description de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$.

Rappelons que si $\mathfrak{X}$ est lisse, $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ est un anneau qui possède d'agréables propriétés, à savoir :

- (i) $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ est un anneau noethérien (à droite et à gauche).
- (ii) R , qui est naturellement un $\mathcal{D}(R)$ -module, est simple.
En fait, $\mathcal{D}(R)$ est un anneau simple (i.e. sans idéal bilatère non trivial).
- (iii) $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini.

Le problème se pose donc de déterminer lesquelles des propriétés (i) à (iii) ci-dessus subsistent lorsque $\mathfrak{X}$ n'est pas lisse.

Si $\mathfrak{X}$ est une courbe, on dispose d'une bonne connaissance de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ grâce à [S.S.].

Si $\mathfrak{X}$ est une surface normale, J. Bernstein, I. et S. Gelfand, [B.G.G.] , ont montré que pour le cône cubique $\{X^3+Y^3+Z^3=0\}$ aucune de ces propriétés n'est vérifiée.

Cet exemple a été généralisé par J.P. Vigué, [V], au cas d'une surface $\mathfrak{X} = \{F(X,Y,Z) = 0\}$, F polynôme homogène de degré ≥ 3 ayant une singularité isolée à l'origine.

D'autre part on a maintenant nombre d'exemples où (i) à (iii) ont lieu : cf [L], [L.Sm], [L.St], [L.S.S], [Mu], [S.S]. On trouvera dans [L.Sm], [L.St] et [L.S.S.] les raisons qui nous ont amené à étudier les opérateurs différentiels sur des variétés singulières ; elles sont issues de la théorie des représentations des algèbres de Lie (semi-simples), leur développement augmenterait par trop la longueur de cette introduction.

Le but principal des présentes notes est de revenir sur l'étude de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ pour des surfaces normales munies d'une bonne $\mathbb{C}^*$ -action, voir [P.2] ou § 5 pour cette notion, et d'inscrire les résultats de [B.G.G] et [V] dans un cadre général.

Plutôt que de détailler les résultats qui suivent nous indiquerons simplement l'idée directrice de ce travail : pour une surface du type précédent $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ n'a de bonnes propriétés que si $\mathfrak{X}$ est une singularité quotient, $\mathbb{C}^2/G$, du plan par un groupe fini.

On trouvera les énoncés précis des principaux résultats en (3.2.2), (4.3.3), (4.3.4), (4.4.10), (4.4.11), (5.2.4 à 7).

Les preuves ne sont pas originales, elles se déduisent facilement de celles de [B.G.G] et [V], déjà réécrites dans [I.1].

Une conséquence de cette étude est de répondre à une question qui se pose naturellement en examinant les exemples positifs cités ci-dessus. Dans tous les cas la variété $\mathfrak{X}$ n'a que des singularités rationnelles, e.g. $\mathfrak{X} = \{X^2+Y^2+Z^2=0\}$ ou certains anneaux classiques d'invariants ; on montre ici que (malheureusement) une telle condition géométrique est insuffisante pour assurer un bon comportement de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$, cf. (5.3.1) et (5.3.2). On pourra également à ce propos consulter l'introduction de [L.St] où certaines questions connexes sont discutées.

O. NOTATIONS

O.1. Les définitions et notations concernant les variétés et les notions géométriques sont celles de [H] . Signalons en particulier :

(O.1.1.) $\mathbb{P}^n$ est l'espace projectif de dimension n sur $\mathbb{C}$.

(O.1.2) Soit R une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini graduée $R = \bigoplus_{k \geq 0} R_k$, $R_0 = \mathbb{C}$.

On note $\text{Proj } R$ la variété projective associée. Rappelons que si $f \in R_q$ on dit que $\deg f = q$ et le localisé R_f est gradué par $[R_f]_k = \left\{ \frac{a}{f^t} / \deg a = t \deg f + k \right\}$.

Une base d'ouverts affines de $\text{Proj } R$ est alors donnée par les $D_+(f) = \text{Spec } [R_f]_0$.

Si $\ell \in \mathbb{Z}$ on désigne par $R(\ell)$ le R -module gradué $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R_{\ell+i}$. Le $\mathcal{O}_{\text{Proj } R}$ -module associé est noté $\mathcal{O}_{\text{Proj } R}(\ell)$.

((O.1.3.) Soit $\tilde{\mathfrak{X}}$ une courbe projective lisse ; tout faisceau inversible $\mathcal{F}$, également appelé fibré de rang 1, s'écrit $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(\mathcal{D})$ pour un diviseur $\mathcal{D} = \sum_p n_p P$ sur $\tilde{\mathfrak{X}}$. Ici $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(\mathcal{D})$ est le $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ de [H] . Le dual de $\mathcal{F}$ sera noté $\mathcal{F}^\vee$.

0.2. En ce qui concerne les anneaux d'opérateurs différentiels nous utiliserons les notations introduites dans [L], d'après [E.G.A.]. Indiquons quelques notations et propriétés utiles.

(O.2.1.) Soit R une $\mathbb{C}$ -algèbre et $\mathfrak{X} = \text{Spec } R$, on désignera par $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ ou $\mathcal{D}(R)$ l'anneau des opérateurs différentiels associé. Rappelons que si R est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini écrite sous la forme $\frac{\mathbb{C}[X_1 \dots X_n]}{I}$, X_i indéterminées et I un idéal, alors on a :

$$\mathcal{D}(R) = \frac{\{P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha} / a_{\alpha} \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] \text{ et } P(I) \subset I\}}{\{P = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha} / a_{\alpha} \in I \text{ pour tout } \alpha\}}$$

où comme d'habitude $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial X_n}\right)^{\alpha_n}$.

(O.2.2) Il existe sur $\mathcal{D}(R)$ une filtration par l'ordre des opérateurs ; ainsi si R est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini comme ci-dessus on pose :

$$\mathcal{D}^m(R) = \left\{ \text{classes des } \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{\alpha}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \right\}$$

L'anneau gradué associé $\text{gr } \mathcal{D}(R) = \bigoplus_m \frac{\mathcal{D}^m(R)}{\mathcal{D}^{m-1}(R)}$ est commutatif ; si $P \in \mathcal{D}^m(R) \setminus \mathcal{D}^{m-1}(R)$ on dira que $\text{ord } P = m$ et on notera $\sigma(P)$ la classe de P dans $\frac{\mathcal{D}^m(R)}{\mathcal{D}^{m-1}(R)}$, c'est le symbole principal de P .

(O.2.3) Si R est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini intègre alors $\mathcal{D}(R)$ et $\text{gr } \mathcal{D}(R)$ sont des $\mathbb{C}$ -algèbres intègres.

Pour la première assertion cf [L], et pour la seconde on raisonne comme suit. Soit K le corps des fractions de R , alors $\mathcal{D}^m(R) = \{P \in \mathcal{D}^m(K) / P(R) \subset R\} = \mathcal{D}^m(K) \cap \mathcal{D}(R)$ et ainsi $\text{gr } \mathcal{D}(R)$ est une sous-algèbre de $\text{gr } \mathcal{D}(K)$, on montre aisément que cette dernière est intègre.

(O.2.4) Comme $\mathcal{D}(R) \subset \text{End}_{\mathbb{C}}(R)$, l'anneau R est naturellement un $\mathcal{D}(R)$ -module à gauche ; pour $D \in \mathcal{D}(R)$ et $f \in R$ on notera $D * f$ à la place de $D(f)$.

(O.2.5) Soit $\mathfrak{X}$ un schéma sur $\mathbb{C}$, de faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, on construit un faisceau d'anneaux d'opérateurs différentiels, noté $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}$, tel que la fibre en $p \in \mathfrak{X}$ soit :

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},p} = \mathcal{D}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},p})$$

où $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},p}$ est l'anneau local de $\mathfrak{X}$ en p .

1. CÔNES ASSOCIES A UN FIBRE AMPLE

1.1 Fixons une variété projective (intègre) lisse $\bar{\mathfrak{X}}$ et un faisceau inversible ample $\mathfrak{L}$ sur $\bar{\mathfrak{X}}$.

On notera $\mathfrak{L}^i$ la puissance tensorielle $\mathfrak{L}^{\otimes i}$, $i \in \mathbb{Z}$.

(1.1.0.) Nous utiliserons les notations suivantes :

$$R = R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}) = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}^i)$$

$$R_i = H^0(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}^i)$$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}) = \text{Spec } R$$

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{i > 0} R_i.$$

Si $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $\bar{\mathfrak{X}}$ on abrègera $H^i(\bar{\mathfrak{X}}, \mathcal{F})$ en $H^i(\mathcal{F})$ et on posera $h^i(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(\mathcal{F})$.

Il est clair que l'anneau R est gradué ; on dit que $\mathfrak{X}$ est le cône associé à $\mathfrak{L}$, le point de $\mathfrak{X}$ correspondant à l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ est appelé l'origine du cône et sera noté $\{O\}$.

Rappelons quelques faits bien connus, cf ([E.G.A.] ou [W.3])

(1.1.1) Comme $\bar{\mathfrak{X}}$ est normale l'anneau R est intègre et intégralement clos.

(1.1.2) La $\mathbb{C}$ -algèbre graduée R est de type fini et la variété projective associée, $\text{Proj } R$, vérifie : $\bar{\mathfrak{X}} \cong \text{Proj } R$.

(1.1.3) On a $\text{prof } R_{\mathfrak{M}} \geq 2$, où prof est la profondeur d'un anneau local et $\dim \mathfrak{X} = \dim \bar{\mathfrak{X}} + 1$.

(1.1.4) Si $\dim \bar{\mathfrak{X}} = 1$, i.e. si $\bar{\mathfrak{X}}$ est une courbe projective lisse, alors le lieu singulier de $\mathfrak{X}$ vérifie $\text{Sing } \mathfrak{X} \subset \{O\}$.

On a $\text{Sing } \mathfrak{X} = \emptyset$ si et seulement si R est un anneau de polynômes, auquel cas $\bar{\mathfrak{X}} \cong \mathbb{P}^1$ (on verra qu'alors $\mathfrak{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$).

(1.1.5) Notons $\mathbb{V}(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}) = \mathbb{V}$ le schéma $\text{Spec } S(\mathfrak{L})$, (cf. [H] ex. II. 5.18), c'est un fibré au dessus de $\bar{\mathfrak{X}}$ ayant $\mathfrak{L}^{-1}$ pour faisceau de sections ; on note p le morphisme (affine) de $\mathbb{V}$ vers $\bar{\mathfrak{X}}$.

Comme $\mathfrak{L}$ est ample il existe un morphisme de contraction (dominant birationnel et propre), cf ([E.G.A] chap. II 8.9.1) :

$$\pi : \mathbb{V} \rightarrow \mathfrak{X}$$

tel que $\pi^{-1}(O) \cong \bar{\mathfrak{X}}$ lorsque $\bar{\mathfrak{X}}$ est identifié à la section nulle dans $\mathbb{V}$.

En particulier si $\bar{\mathfrak{X}}$ est une courbe et $\text{Sing } \mathfrak{X} = \{O\}$ alors $(\mathbb{V}, \pi)$ est une désingularisation de $\mathfrak{X}$.

1.2. Rappelons, qu'avec les notations de 1.1, si $\mathcal{Z}$ est ample alors $\mathcal{Z}^q$ est très ample pour $q \gg 0$. Fixons un tel q et posons :

$$R^{(q)} = \bigoplus_{i \geq 0} R_i^{(q)} \quad \text{où} \quad R_i^{(q)} = R_{qi}.$$

$$s+1 = h^0(\mathcal{Z}^q).$$

Donc par définition il existe une immersion fermée $\bar{\mathcal{X}} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^s$. Notons $\mathcal{Y}$ l'image de cette immersion et $j: \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathbb{P}^s$ l'inclusion canonique. On a donc $\mathcal{Y} = \varphi(\bar{\mathcal{X}})$ et $\mathcal{Z}^q \cong j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^s}(1) = \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)$ par l'isomorphisme φ de $\bar{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{Y}$.

Soit J l'idéal homogène définissant $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{P}^s$ et posons :

$$S = \frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]}{J}.$$

C'est un anneau gradué ; on note S_i le sous-espace vectoriel formé des éléments homogènes de degré i . Avec des notations évidentes, compte tenu de $\deg X_j = 1$, on a donc :

$$S_i = \frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]_i}{J \cap \mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]_i}$$

Grâce à $\mathcal{Z}^q \cong \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)$ il existe $f_j \in H^0(\mathcal{Z}^q)$ correspondant à $\bar{X}_j \in H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(1)) = S_1$, on pose $x_j = \bar{X}_j$.

La variété $\mathcal{Y}$ est recouverte par les ouverts affines $\mathcal{Y}_j = \text{Spec } [S_{x_j}]_0$, $0 \leq j \leq s$,

l'isomorphisme φ donne : $\bar{\mathcal{X}}_j = \text{Spec } [R_{f_j}]_0 \cong \mathcal{Y}_j$.

On a :

$$\forall \ell \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} H^0(\mathcal{Y}_j, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}(\ell)) = [S_{x_j}]_0 \cdot x_j^\ell \\ H^0(\bar{\mathcal{X}}_j, \mathcal{Z}^q(\ell)) = [R_{f_j}]_0 \cdot f_j^\ell \end{cases}$$

1.3. Supposons maintenant que $\bar{\mathcal{X}}$ soit une courbe de genre g .

Rappelons, ([H] ex. IV, 4.2), que tout faisceau inversible $\mathcal{F}$ de degré $\geq 2g+1$ est normalement engendré : $\mathcal{F}$ est très ample et l'application naturelle

$$S^i(H^0(\mathcal{F})) \rightarrow H^0(\mathcal{F}^i)$$

est surjective pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Ainsi l'anneau $\bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathcal{F}^i)$ est engendré par ses éléments homogènes de degré 1 et est l'anneau coordonné associé au

plongement $\bar{\mathcal{X}} \hookrightarrow \mathbb{P}^s$, $s+1 = h^0(\mathcal{F})$.

Soit maintenant $\mathcal{Z}$ un faisceau inversible ample sur $\bar{\mathcal{X}}$ de degré $\delta (>0)$. On a $\deg \mathcal{Z}^q = q\delta \geq 2g+1$ dès que $q \geq \frac{2g+1}{\delta}$

et ce qui a été dit ci-dessus s'applique à $\mathcal{F} = \mathcal{Z}^q$, utilisant les notations de 1.2, il vient :

$$\forall q \geq \frac{2g+1}{\delta} \quad \begin{cases} R_i^{(q)} = R_{qi} = (R_q)^i \\ R_i^{(q)} \equiv S_i \text{ grâce à } \varphi \end{cases}.$$

(1.3.1.) On a ainsi montré que l'anneau gradué $R = R(\overline{\mathfrak{F}}, \mathfrak{B})$ vérifie la condition (#) de [G.W] ou [I.1] c'est à dire :

$$(\#) \exists q_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \forall q \geq q_0 \text{ } R^{(q)} \text{ est engendré par } R_q \text{ sur } R_0 = \mathbb{C}.$$

On a vu que $1 + \lfloor \frac{2g+1}{\delta} \rfloor$ convient, ce n'est évidemment pas le plus petit possible en général.

(1.3.2) Rappelons que $\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{F}}}(\mathcal{L})$ est le faisceau sur $\overline{\mathfrak{F}}$ associé au R-module gradué

$$R(\mathcal{L}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R(\mathcal{L})_i \text{ où } R(\mathcal{L})_i = R \mathcal{L}_{+i}.$$

Par ([G.W.] 5.1.5) on a : $\mathfrak{B}^{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{F}}}(\mathcal{L})$ pour tout $\mathcal{L} \in \mathbb{Z}$, (on utilise la condition (#))

Notons Ω le faisceau canonique sur $\overline{\mathfrak{F}}$, i.e. le faisceau des 1-formes différentielles, $\vartheta = \Omega^\vee$ le dual de Ω , i.e. le faisceau tangent. On a donc :

$$g = h^0(\Omega) = h^1(\mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{F}}}), \deg \Omega = -\deg \vartheta = 2g-2.$$

Signalons que l'anneau R , qui est Cohen-Macaulay par (1.1.3), (1.1.4), est Gorenstein si et seulement si

$$\Omega = \mathfrak{B}^N = \mathcal{O}_{\overline{\mathfrak{F}}}(\mathcal{N})$$

pour un $N \in \mathbb{Z}$, cf ([G.W.] 5.1.9.). On a alors $N\delta = 2g-2$.

1.4 Faisons ici $\overline{\mathfrak{F}} = \mathbb{P}^1$, i.e. $g = 0$. Tout fibré ample de rang 1 s'écrit $\mathfrak{B} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ avec $n = \deg \mathfrak{B} > 0$. On a $\Omega = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$, donc les anneaux $R(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ sont de Gorenstein si et seulement si $n = 1$ ou 2.

(1.4.1.) Les anneaux $R = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(in))$ peuvent se décrire de la façon suivante cf. [P.1.]. $R \cong \frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]}{I}$

où $X_0, \dots, X_n$ sont des indéterminées et I est l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_{n-1} \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix}$$

Remarquons que R est régulier si et seulement si $n = 1$.

(1.4.2) Il est utile de donner une autre présentation de R ; soient X, Y deux indéterminées et $\mathbb{Z}_n$ le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ opérant sur $\mathbb{C}[X, Y]$ par $(X, Y) \mapsto (\omega X, \omega Y)$ où ω est une racine primitive n -ième de l'unité. L'anneau des invariants $\mathbb{C}[X, Y]^{\mathbb{Z}_n}$ est égal à

$$\mathbb{C}[X^n, \dots, X^{n-i}Y^i, \dots, Y^n]$$

On remarque alors que l'on a un isomorphisme de $\frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]}{I}$, introduit en (1.4.1), sur $\mathbb{C}[X, Y]^{\mathbb{Z}_n}$ en envoyant la classe de X_i sur $X^{n-i}Y^i$.

2. LES RESULTATS DE [B.G.G.]

2.1. On fixe une courbe projective lisse $\tilde{\mathcal{X}}$ et un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$; on utilise les notations introduites au § 1. En particulier $R = R(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{L})$, $\mathcal{X} = \text{Spec } R$.

Nous adopterons les notations de [I.1].

(2.1.1) Notons $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R)$ l'anneau des opérateurs différentiels sur R . Rappelons qu'il est filtré par les

$$\mathcal{D}^m = \mathcal{D}^m(R) = \{D \in \mathcal{D} / \text{ord } D \leq m\}$$

On a $\mathcal{D}^m = \text{Der}^m(R) \oplus R$ où $\text{Der}^m(R) = \{D \in \mathcal{D}^m / D \cdot 1 = 0\}$ est le R -module des opérateurs différentiels sans terme constant d'ordre $\leq m$.

On pose $\text{Der}(R) = \bigcup_{m \geq 0} \text{Der}^m(R)$, de sorte que $\mathcal{D} = R \oplus \text{Der}(R)$.

L'anneau $\mathcal{D}$ est gradué : $\mathcal{D} = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \mathcal{D}_{\ell}$ où l'on note $\mathcal{D}_{\ell} = \{D \in \mathcal{D} / D \cdot R_i \subset R_{i+\ell} \text{ pour tout } i\}$. On pose :

$$\deg D = \ell \text{ si } D \in \mathcal{D}_{\ell}$$

$$\mathcal{D}_{\ell}^m = \mathcal{D}_{\ell} \cap \mathcal{D}^m, \text{Der}_{\ell}(R) = \mathcal{D}_{\ell} \cap \text{Der}(R), \text{Der}_{\ell}^m(R) = \text{Der}_{\ell}(R) \cap \text{Der}^m(R),$$

$$\text{ainsi : } \text{Der}^m(R) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \text{Der}_{\ell}^m(R), \text{Der}(R) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} \text{Der}_{\ell}(R).$$

(2.1.2.) On a vu que $\text{Sing } \mathcal{X} \subset \{O\}$, on pose $\mathcal{X}_O = \mathcal{X} - \{O\}$ qui est une variété quasi-affine lisse. On note $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_O}$ le faisceau structural et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}$ le faisceau d'anneaux d'opérateurs différentiels sur $\mathcal{X}_O$; $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}$ est filtré par les $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m$ et on définit $\mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m$, le faisceau des opérateurs différentiels sans terme constant, de manière évidente de sorte que :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}_O} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m \rightarrow 0, \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O} = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m.$$

Par ((1.1.3), (1.1.4) et [L] prop. 2 p. 167), il vient :

$$\forall m \geq 0, H^0(\mathcal{X}_O, \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m) = \mathcal{D}^m(R), H^0(\mathcal{X}_O, \mathcal{D}_{\mathcal{X}_O}^m) = \text{Der}^m(R).$$

(2.1.3) L'anneau R étant gradué il admet une présentation de la forme :

$$R = \frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]}{(E)} = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_s]$$

avec :

X_i indéterminée affectée du degré $d_i > 0$.

$(E) = (F_1, \dots, F_t)$ idéal homogène.

x_i = classe de X_i modulo (E) .

On posera $d = \min \{d_i, 0 \leq i \leq s\} \geq 1$.

L'espace vectoriel $\mathbb{C}\{X_0, \dots, X_s\}_j$ a pour base les $X_0^{\alpha_0} \dots X_s^{\alpha_s}$ tels que $j = \deg X_0^{\alpha_0} \dots X_s^{\alpha_s} = \alpha_0 d_0 + \dots + \alpha_s d_s$.

Donc en posant $(E)_j = (E) \cap \mathbb{C}\{X_0, \dots, X_s\}_j$, on a : $R_j = H^0(\mathcal{E}^j) = \frac{\mathbb{C}\{X_0, \dots, X_s\}_j}{(E)_j}$. Insistons sur $R_j = (0)$ si $0 < j < d$.

On peut introduire la dérivation d'Euler :

$$I = \sum_{i=0}^s d_i X_i \frac{\partial}{\partial X_i}$$

et on note encore $I = \sum_{i=0}^s d_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivation qu'elle induit sur R . On a alors :

$$\forall f \in R_p, I * f = pf.$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m(R) = \{D \in \mathcal{D}^m / [I, D] = I D - D I = \mathcal{L} D\}$$

$$\text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R) = \{D \in \text{Der}^m(R) / [I, D] = \mathcal{L} D\}$$

Remarquons que $I \in \text{Der}_O^1(R)$.

2.2 Rappelons que $\tilde{\mathfrak{X}} \cong \text{Proj } R$; le groupe $\mathbb{C}^*$ opère sur R par $\lambda . f = \lambda^d f$ si $f \in R_d, \lambda \in \mathbb{C}^*$. Donc $\mathbb{C}^*$ opère sur $\mathfrak{X} = \text{Spec } R$ avec un unique point fixe $\{O\}$, on trouve ainsi $\tilde{\mathfrak{X}} \cong \mathfrak{X}_O / \mathbb{C}^*$ et l'on note π la projection $\mathfrak{X}_O \rightarrow \tilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}_O / \mathbb{C}^*$, c'est un morphisme affine.

(2.2.1) Introduisons le faisceau sur $\mathfrak{X}_O$ des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq m$ et de degré $\mathcal{L}$ sans terme constant, que l'on notera $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}_O, \mathcal{L}}^m$ ou plus simplement $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m$.

Soit $f \in R_q$, l'anneau R_f étant gradué on définit :

$$\text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f) = \{D \in \text{Der}^m(R_f) / D_*[R_f]_i \subset [R_f]_{\mathcal{L}+i}\}.$$

Notons que la dérivation I de (2.1.3) s'étend à R_f en un élément de $\text{Der}_O^1(R_f)$ et on a :

$$\text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f) = \{D \in \text{Der}^m(R_f) / [I, D] = \mathcal{L} D\}$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m$ sur $\mathfrak{X}_O$ est donné sur l'ouvert $D(f) = \text{Spec } R_f, f \in R_q$, par :

$$\Gamma(D(f), \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m) = \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f). \text{ Signalons que } \Gamma(\mathfrak{X}_O, \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m) = \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R), \text{ cf. (2.1.2).}$$

(2.2.2) Posons $\Delta_{\mathcal{L}}^m = \pi_* \mathcal{D}_{\mathcal{L}}^m$, c'est un $\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ -module ; sur un ouvert affine $D_+(f) = \text{Spec}[R_f]_O$ de $\tilde{\mathfrak{X}}$ on a :

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}) = [R_f] \circ$$

$$\Gamma(D_+(f), \Delta_{\mathcal{L}}^m) = \Gamma(D_+(f), \mathcal{D}er_{\mathcal{L}}^m) = \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f).$$

Il est donc clair que $[R_f] \circ \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f) \subset \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f)$. On a en outre :

$$H^0(\tilde{\mathfrak{X}}, \Delta_{\mathcal{L}}^m) = \Gamma(\mathfrak{X}_0, \mathcal{D}er_{\mathcal{L}}^m) = \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R).$$

2.3. Nous allons rappeler les résultats de [B.G.G] repris dans [I.1.] en toute généralité.

(2.3.1.) **PROPOSITION.** Soit q_0 comme dans (#) de (1.3.1). Alors on a :

$$\forall \mathcal{L} \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |\mathcal{L}| \geq q_0, \Delta_{\mathcal{L}}^m \cong \Delta_0^m \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}}.$$

Cet isomorphisme étant compatible à l'inclusion $\Delta_{\mathcal{L}}^m \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{L}}^p$ pour $p > m$.

Preuve On réécrit celle de ([I.1] Lemma 6) avec les notations précédentes. Soit $f \in R_q$, $D_+(f) = \text{Spec } [R_f]_0$, on a :

$$\Gamma(D_+(f), \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}) = [R_f]_0, \Gamma(D_+(f), \Delta_{\mathcal{L}}^m) = \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_f).$$

$$\Gamma(D_+(f), \Delta_0^m \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}}) = \text{Der}_0^m(R_f) \otimes_{[R_f]_0} \Gamma(D_+(f), \mathcal{L}^{\mathcal{L}}).$$

Ecrivons $\mathcal{L} = \varepsilon |\mathcal{L}|$, $\varepsilon = \pm 1$, pour $|\mathcal{L}| \geq q_0$, prenons $f = f_j \in R_{|\mathcal{L}|}$ comme en 1.2, de sorte que les $D_+(f_j) = \tilde{\mathfrak{X}}_j$ recouvrent

$\tilde{\mathfrak{X}}$. On a $\Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}_j, \mathcal{L}^{\mathcal{L}}) = [R_{f_j}]_0 f_j^{\varepsilon}$ et on peut construire une application $\Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}_j, \Delta_0^m \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}}) \rightarrow \Gamma(\tilde{\mathfrak{X}}_j, \Delta_{\mathcal{L}}^m)$ en envoyant

$D \otimes f_j^{\varepsilon}$ sur $f_j^{\varepsilon} D$ pour tout $D \in \text{Der}_0^m(R_{f_j})$. L'inverse de cette application étant

$$D \in \text{Der}_{\mathcal{L}}^m(R_{f_j}) \mapsto f_j^{-\varepsilon} D \otimes f_j^{\varepsilon}.$$

(2.3.2) Nous utiliserons les notations de [I.1] , on pose :

$$\sigma_1 = \Delta_0^1, \quad \sigma_m = \frac{\Delta_0^m}{\Delta_0^{m-1}} \quad \text{si } m \geq 1, \quad \mathfrak{L}_m = \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}} \cdot I \cong \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}, \quad \sigma_0 = \mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}, \quad \sigma_{-1} = (0).$$

Par [B.G.G] ou [I.1.] on a des suites exactes :

$$(*)_{m, \mathcal{L}} : \forall m \geq 0, \forall \mathcal{L} \in \mathbb{Z}, 0 \rightarrow \sigma_{m-1} \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}} \rightarrow \sigma_m \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}} \rightarrow \mathfrak{L}^m \otimes \mathcal{L}^{\mathcal{L}} \rightarrow 0.$$

Elles sont déduites de $O \rightarrow \sigma_{m-1} \rightarrow \sigma_m \rightarrow \vartheta^m \rightarrow O$ où la première flèche est la multiplication par $I \in H^0(\overline{\mathcal{X}}, \Delta_O^1) = \text{Der}_O^1(R)$. Notons que $(*)_{1,O}$ est la suite duale de celle de ([W.3.] (1.1.5)) qui est donnée par la première

classe de Chern $c_1(\mathcal{Z}) \in H^1(\Omega) - \{O\}$; en particulier elle n'est pas scindée, cf. ([I.1] preuve du lemme 9).

(2.3.3) Il est clair que l'on a des suites exactes :

$$(**)_{m,\ell} \quad O \rightarrow \Delta_{\ell}^{m-1} \rightarrow \Delta_{\ell}^m \rightarrow \frac{\Delta_{\ell}^m}{\Delta_{\ell}^{m-1}} \rightarrow O \text{ pour } \ell \in \mathbb{Z}, m \geq 2.$$

Lorsque $|\ell| \geq q_0$ ou $\ell = O$ elles s'écrivent par (2.3.1) :

$$O \rightarrow \Delta_{\ell}^{m-1} \rightarrow \Delta_{\ell}^m \rightarrow \sigma_m \otimes \mathcal{Z}^{\ell} \rightarrow O.$$

(2.3.4) Par ([B.G.G.] ou [I.1.]) on a :

$$(***)_m \quad O \rightarrow \mathcal{N}^m \rightarrow \sigma_m \rightarrow \vartheta \otimes \sigma_{m-1} \rightarrow O.$$

(2.3.5) Des suites $(*)_{m,\ell}$ et $(**)_m$ on déduit les longues suites exactes :

$$\begin{aligned} (*)'_{m,\ell} : O \rightarrow H^0(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) &\xrightarrow{\Phi_{m,\ell}} H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \xrightarrow{\Psi_{m,\ell}} H^0(\vartheta^m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow H^1(\sigma_m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow H^1(\vartheta^m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow O \end{aligned}$$

pour $m \geq 0, \ell \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} (**)'_{m,\ell} : O \rightarrow H^0(\Delta_{\ell}^{m-1}) &\longrightarrow H^0(\Delta_{\ell}^m) \longrightarrow H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^1(\Delta_{\ell}^{m-1}) \longrightarrow H^1(\Delta_{\ell}^m) \longrightarrow H^1(\sigma_m \otimes \mathcal{Z}^{\ell}) \longrightarrow O \end{aligned}$$

pour tout $m \geq 2, |\ell| \geq q_0$ ou $\ell = O$.

(2.3.6) En tensorisant la suite $(***)_m$ par $\vartheta^p, p \in \mathbb{Z}$, on déduit :

$$\begin{aligned} (***)'_{m,p} : O \rightarrow H^0(\mathcal{N}^m \otimes \vartheta^p) &\longrightarrow H^0(\sigma_m \otimes \vartheta^p) \longrightarrow H^0(\vartheta^{p+1} \otimes \sigma_{m-1}) \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\partial_m} H^1(\mathcal{N}^m \otimes \vartheta^p) \longrightarrow H^1(\sigma_m \otimes \vartheta^p) \longrightarrow H^1(\vartheta^{p+1} \otimes \sigma_{m-1}) \longrightarrow O \end{aligned}$$

3. OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES CÔNES AU DESSUS D'UNE COURBE DE GENRE ≥ 1 . Cas général.

On considère dans ce paragraphe une courbe $\overline{\mathcal{X}}$ de genre $g \geq 1$ et $\mathcal{Z}$ un fibré ample de rang 1 de degré $\delta > 0$.

Toutes les notations des § 1 et § 2 seront librement utilisées. Insistons sur $\deg \vartheta = -(2g-2) \leq 0$, où $\vartheta = \Omega^{\vee}$ est le faisceau tangent.

3.1 On va déduire des suites exactes de 2.3. quelques corollaires, cf [B.G.G.] ou [I.1].

(3.1.1) LEMME : $\forall \ell < 0, \forall m \geq 0, H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{I}^\ell) = 0$.

Preuve : Pour $m = 0 : \sigma_0 \otimes \mathcal{I}^\ell = \mathcal{I}^\ell$ avec $\deg \mathcal{I}^\ell = \ell\delta < 0$ si $\ell < 0$, donc le résultat est clair. On fait alors une récurrence sur m . Comme $2g-2 \geq 0$ on a pour $m \geq 0$:

$$\deg \vartheta^m \otimes \mathcal{I}^\ell = \ell\delta + m(2-2g) < 0.$$

De (2.3.5) on tire $H^0(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{I}^\ell) \cong H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{I}^\ell)$ et on termine par récurrence.

(3.1.2) LEMME : $\forall m \geq 1, \forall \ell \leq -q_0, H^0(\Delta_\ell^m) \cong H^0(\Delta_\ell^1)$.

Preuve : Comme $\ell \leq -q_0 < 0$ on a $H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{I}^\ell) = 0$ par (3.1.1). De (2.3.5) (**)' $_{m,\ell}$ on déduit

$$H^0(\Delta_\ell^{m-1}) \cong H^0(\Delta_\ell^m) \text{ pour } m \geq 2.$$

3.2 Nous allons montrer dans cette section qu'il n'existe pas d'opérateur différentiel sur R de degré < 0 .

(3.2.1) PROPOSITION : $\forall m \geq 1, \forall \ell < 0, H^0(\Delta_\ell^m) = \text{Der}_\ell^m(R) = 0$.

Preuve : Par ([W.2] ou [W.3.]) on a $\text{Der}_\ell^1(R) = 0$ si $\ell < 0$. En particulier : $\forall \ell \leq -q_0, H^0(\Delta_\ell^1) = \text{Der}_\ell^1(R) = 0$.

Par (3.1.2.) $\forall \ell \leq -q_0, \forall m \geq 1, H^0(\Delta_\ell^m) = \text{Der}_\ell^m(R) = 0$.

Soit $m \geq 1$ et $\ell < 0$, prenons $k \geq 1$ tel que $k\ell < -q_0$; si $D \in \text{Der}_\ell^m(R)$ on a $D^k \in \text{Der}_{k\ell}^m(R)$ dans $\mathcal{D}(R) = \mathcal{D}$ et

donc $D^k = 0$ par ce qui précède. Comme $\mathcal{D}$ est intègre il vient $D = 0$.

(3.2.2) COROLLAIRE : L'idéal $\mathcal{M} = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ est un sous- $\mathcal{D}$ -module de R .

En particulier $\mathcal{D}$ n'est pas un anneau simple et $\mathcal{C} = \frac{R}{\mathcal{M}}$ est un $\mathcal{D}$ -module simple.

Preuve : Par (3.2.1) $\mathcal{D} = \bigoplus_{\ell \geq 0} \mathcal{D}_\ell$; comme $\mathcal{D}_\ell * R_i \subset R_{i+\ell}$ il vient $\mathcal{D} * \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$. Les autres assertions sont alors évidentes.

3.3 Nous allons décrire $\mathcal{D}_0(R) = \bigcup_{m \geq 0} \mathcal{D}_0^m(R)$ comme dans [B.G.G].

(3.3.1) LEMME : On a $H^0(\sigma_1) = H^0(\Delta_0^1) = \text{Der}_0^1(R) = \mathbb{C}.I$.

Preuve On utilise [W.2.] (se rappeler que $g \geq 1$).

(3.3.2) LEMME : Supposons $g \geq 2$, alors :

$$\forall p > 0, \forall m \geq 0 \quad H^0(\vartheta^p \otimes \sigma_m) = 0 \text{ et } h^0(\sigma_m) = 1.$$

Preuve : L'hypothèse assure que $\deg \vartheta < 0$; donc $H^0(\vartheta^p) = 0$ pour $p > 0$. On fait une récurrence sur m . Si $m = 1$, on tire de (2.3.6) :

$$0 \rightarrow H^0(\vartheta^p) = 0 \rightarrow H^0(\sigma_1 \otimes \vartheta^p) \rightarrow H^0(\vartheta^{p+1} \otimes \mathcal{M}_0) = 0 \rightarrow \dots$$

(on rappelle que $\mathcal{N} \equiv \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$).

Pour m quelconque une nouvelle utilisation de (2.3.6) et la récurrence donnent $H^0(\vartheta^p \otimes \sigma_m) = 0$.

Pour calculer $h^0(\sigma_m)$ on utilise (2.3.6) avec $p = 0$, il vient $H^0(\sigma_m) \equiv H^0(\mathcal{N}^m)$ puisque $H^0(\vartheta \otimes \sigma_{m-1}) = 0$, d'où $h^0(\sigma_m) = 1$.

(3.3.3) **LEMME** : Supposons $g = 1$, donc $\vartheta \equiv \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$, alors $\forall m \geq 0$, $h^0(\sigma_m) = 1$.

Preuve : Compte tenu de (3.3.1) c'est la preuve de ([B.G.G.] Lemma 5) en utilisant les suites exactes de (2.3.6).

(3.3.4) **THEOREME** : L'espace vectoriel $\text{Der}_O^m(R)$ est de dimension m de base $\{I, I^2, \dots, I^m\}$. Ainsi $\forall m \geq 0$

$$\mathcal{D}_O^m(R) \cong \bigoplus_{i=0}^m \mathbb{C} I^i.$$

Preuve : C'est celle de ([B.G.G.] Proposition 1. 2°) en notant que $h^0(\sigma_m) = 1$ par (3.3.2) et (3.3.3).

3.4 Comme il est signalé dans [B.G.G.] on a des résultats analogues en remplaçant $\mathcal{D}(R)$ par l'anneau des germes en O d'opérateurs analytiques sur $\mathcal{X}$. Nous laissons le soin au lecteur d'énoncer ces résultats.

4. OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES CÔNES AU DESSUS D'UNE COURBE DE GENRE ≥ 1 . Cas Gorenstein

4.1 On reprend $\mathcal{X}, \mathcal{Z}$ comme au § 3 et l'on fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$R = R(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) \text{ anneau de Gorenstein.}$$

(4.1.1) Rappelons que R Gorenstein équivaut à l'existence de N (ici ≥ 0) tel que $\mathcal{Z}^N \equiv \Omega$, cf (1.3.2). On a alors $N\delta = 2g-2$ si $\delta = \deg \mathcal{Z}$.

(4.1.2) Si $\mathcal{X}$ est elliptique i.e. $g = 1$, R est toujours Gorenstein puisque $\mathcal{Z}^0 \equiv \mathcal{O}_{\mathcal{X}} = \Omega$.

(4.1.3) Si la suite $(F_1, \dots, F_t)$, définissant (F) comme en (2.1.3), est régulière dans $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]$ alors R est Gorenstein et on peut prendre $N = \sum_{j=1}^t c_j - \sum_{i=0}^s d_i$ où $\deg F_j = c_j$, cf ([I.1] § 3).

En particulier, si X, Y, Z sont des indéterminées et si F est un polynôme homogène de degré $n \geq 3$ dans $S = \mathbb{C}[X, Y, Z]$ avec $\deg X = \deg Y = \deg Z = 1$, posons $R = \frac{S}{F \cdot S}$.

Supposons que R soit normal (intégral), $\mathcal{X} = \text{Proj } R$ étant une courbe de genre $g \geq 1$.

On a évidemment $\mathcal{X} \xrightarrow{j} \mathbb{P}^2 = \text{Proj } S$, le faisceau $\mathcal{Z} = j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ est très ample et l'on a

$$R = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathcal{Z}^i)$$

Le genre de $\mathcal{X}$ est $g = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, on a $\mathcal{Z}^{n-3} = \Omega$, $\deg \mathcal{Z} = n$; l'anneau $\mathcal{D}(R)$ est alors étudié dans [V], nous voulons généraliser cette étude à $R(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ Gorenstein quelconque.

(4.1.4) Signalons enfin que si $g \geq 1$ et $\mathfrak{B} = \mathfrak{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}}(P)$ pour P un point de $\tilde{\mathfrak{X}}$ la condition $R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{B})$ Gorenstein est caractérisée dans ([G.W.] 5.2.6).

4.2 Nous allons reprendre rapidement la preuve de quelques résultats figurant dans [B.G.G], [V] et [I.1.] ; nous ne rappellerons pas toujours les références précises de ces résultats.

(4.2.1) LEMME : Soit $mN \leq \ell-1$ alors :

$$(a) \forall 0 \leq i \leq m-1, H^1(\mathfrak{O}^i \otimes \mathfrak{B}^\ell) = H^1(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) = 0$$

(b) L'application $\Psi_{i,\ell}$ de $(*)'_{i,\ell}$ en (2.3.5) est surjective pour $0 \leq i \leq m$:

$$H^0(\mathfrak{O}^i \otimes \mathfrak{B}^\ell) \cong \frac{H^0(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell)}{I H^0(\sigma_{i-1} \otimes \mathfrak{B}^\ell)}$$

Preuve : On vérifie que $mN \leq \ell-1$ implique $H^0(\mathfrak{B}^{(i+1)N-\ell}) = 0$ pour $0 \leq i \leq m-1$. On fait alors une récurrence, grâce à (2.3.5), pour trouver $H^1(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) = 0$ pour $0 \leq i \leq m-1$. On en déduit la surjectivité de $\Psi_{i,\ell}$ pour $0 \leq i \leq m$, et comme $\Phi_{i,\ell}$ est la multiplication par I on a les résultats cherchés.

(4.2.2) LEMME : Soient $\ell \geq q_0$ et $m \geq 1$ tels que $mN \leq \ell-1$. Alors :

$$(a) \forall 1 \leq i \leq m, H^0(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) = \frac{\text{Der}_{\ell}^i(R)}{\text{Der}_{\ell}^{i-1}(R)}$$

(b) Pour $mN+d \geq q_0$,

$$\text{Der}_{mN+d}^m(R) \supsetneq \text{Der}_{mN+d}^{m-1}(R) + I \text{Der}_{mN+d}^{m-1}(R)$$

Preuve : Rappelons que q_0 et d sont introduits dans (1.3.1) et (2.1.3) respectivement.

(a) Pour $i = 1$: $H^0(\sigma_1 \otimes \mathfrak{B}^\ell) = H^0(\Delta_0^1 \otimes \mathfrak{B}^\ell) = H^0(\Delta_\ell^1) = \text{Der}_\ell^1(R)$ et comme $\text{Der}_\ell^0(R) = (0)$ le résultat est vrai.

Montrons par récurrence sur i que $H^1(\Delta_\ell^{i-1}) = H^1(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) = 0$ pour $1 \leq i \leq m-1$. Par (2.3.5) on a :

$$\cdots \rightarrow H^1(\Delta_\ell^{i-1}) \rightarrow H^1(\Delta_\ell^i) \rightarrow H^1(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) \rightarrow 0$$

Donc si $H^1(\Delta_\ell^{i-1}) = 0$ il vient $H^1(\Delta_\ell^i) = H^1(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell)$ ce qui vaut 0 par (4.2.1) si $1 \leq i \leq m-1$.

La suite $(**)_{i,\ell}'$ donne ainsi pour $1 \leq i \leq m$:

$$0 \rightarrow H^0(\Delta_\ell^{i-1}) \rightarrow H^0(\Delta_\ell^i) \rightarrow H^0(\sigma_i \otimes \mathfrak{B}^\ell) \rightarrow 0.$$

On termine par (2.2.2).

(b) Comme $d \geq 1$, $\ell = mN+d \geq mN+1$ et (a) s'applique :

$$H^0(\sigma_i \otimes \mathcal{B}^\ell) = \frac{\text{Der}_\ell^i(R)}{\text{Der}_\ell^{i-1}(R)} \quad \text{pour } i = m-1, m.$$

De (4.2.1) on tire $H^0(\vartheta^m \otimes \mathcal{B}^\ell) \cong \frac{H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{B}^\ell)}{I H^0(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{B}^\ell)}$, mais $H^0(\vartheta^m \otimes \mathcal{B}^{mN+d}) = H^0(\mathcal{B}^d) \neq 0$ ($\mathcal{B}^N = \Omega = \vartheta^v$)

d'où le résultat.

4.3. Plaçons nous maintenant dans le cas où $\mathcal{B}$ est elliptique, i.e. $N = 0$. Alors les énoncés de 4.2 prennent une forme simple, et l'on retrouve les résultats de [B.G.G].

$$(4.3.1) \text{ LEMME : } \forall m \geq 0, \forall \ell \geq 1 \quad H^0(\mathcal{B}^\ell) = \frac{H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{B}^\ell)}{I H^0(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{B}^\ell)}.$$

Preuve : C'est (4.2.1) en notant que $N = 0$ et $\vartheta \cong \mathcal{B}$.

$$(4.3.2.) \text{ LEMME : (a) } \forall m \geq 1, \forall \ell \geq q_0 \quad H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{B}^\ell) = \frac{\text{Der}_\ell^m(R)}{\text{Der}_\ell^{m-1}(R)}$$

$$(b) \forall m \geq 1, \forall \ell \geq q_0 \quad \dim_{\mathbb{C}} \frac{\text{Der}_\ell^m(R)}{\text{Der}_\ell^{m-1}(R) + I \text{Der}_\ell^{m-1}(R)} = \delta \ell > 0.$$

Preuve (a) est (4.2.2) (a)

$$(b) \text{ résulte de (4.3.1) et (a) ci-dessus puisque } \frac{\text{Der}_\ell^m(R)}{\text{Der}_\ell^{m-1}(R) + I \text{Der}_\ell^{m-1}(R)} \cong H^0(\mathcal{B}^\ell) \text{ qui est de dimension } \delta \ell \text{ car}$$

$\mathcal{B}$ est elliptique et $\deg \mathcal{B}^\ell = \delta \ell > 0$.

(4.3.3) THEOREME : Fixons $\ell \geq q_0$ (> 0) et pour tout $k \geq 0$ posons comme dans [B.G.G.] :

$$\mathcal{J}_k = \sum_{n \geq 0} I^n \mathcal{D}_\ell^k(R) + \sum_{i \geq \ell+1} \mathcal{D}_i(R).$$

Alors $(\mathcal{J}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'idéaux bilatères de $\mathcal{D}(R)$, (qui n'est donc pas noethérien).

Preuve : Rappelons que $\mathcal{D}_t^s(R) \mathcal{D}_\ell^k(R)$ et $\mathcal{D}_\ell^k(R) \mathcal{D}_t^s(R)$ sont contenus dans $\mathcal{D}_{\ell+t}^{s+k}(R)$.

Il est clair que $\mathcal{J}_k$ est stable par addition. Soit $P \in \mathcal{D}_t^s(R)$ deux cas sont possibles :

- si $t = 0$, $P \in \mathbb{C} 1 + \dots + \mathbb{C} I^s$ par (3.3.5) et alors :

$$P \mathcal{D}_\ell^k(R) + \mathcal{D}_\ell^k(R) P \subset \sum_{n \geq 0} I^n \mathcal{D}_\ell^k(R)$$

$$P \mathcal{D}_j(R) + \mathcal{D}_j(R) P \subset \sum_{i \geq \ell+1} \mathcal{D}_i(R) \text{ si } j \geq \ell+1.$$

- si $t > 0$, $P \mathfrak{D}_j^k(R)$ et $\mathfrak{D}_j^k(R)P$ sont contenus dans $\sum_{i \geq \ell+1} \mathfrak{D}_i(R)$, pour tout $j \geq \ell$.

On a donc montré que $\mathfrak{J}_k$ est un idéal bilatère de $\mathfrak{D}$; il est évident que $\mathfrak{J}_k \subset \mathfrak{J}_{k+1}$.

Remarquons que :

$$\forall D \in \text{Der}^k(R), \forall n \geq 0, I^n D \notin \text{Der}^{k+n-1}(R) \text{ si } \text{ord } D = k.$$

En effet $\text{gr } \mathfrak{D}(R)$ est intègre et si $I^n D \in \text{Der}^{k+n+1}(R)$ avec $\text{ord } D = k$, il en découle : $\sigma(I)^n \sigma(D) = 0$ dans $\text{gr } \mathfrak{D}(R)$ avec $\sigma(D) \neq 0$. Cela force $\sigma(I) = 0$ ce qui est impossible.

De cette remarque on tire les égalités :

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_k \cap \text{Der}_{\ell}^{k+1}(R) = \text{Der}_{\ell}^k(R) + I \text{Der}_{\ell}^k(R) \\ \mathfrak{J}_{k+1} \cap \text{Der}_{\ell}^{k+1}(R) = \text{Der}_{\ell}^{k+1}(R) \end{cases}$$

Grâce à (4.3.2) (b) on conclut $\mathfrak{J}_{k+1} \supsetneq \mathfrak{J}_k$.

(4.3.4) THEOREME L'algèbre $\mathfrak{D}(R)$ n'est pas de type fini sur $\mathbb{C}$.

Preuve : Par (3.3.5) et (2.1.3) si $\mathfrak{D}(R)$ est engendré par $P_0, \dots, P_{\nu}$ sur $\mathbb{C}$ on peut toujours supposer :

$$P_0 = x_0, \dots, P_s = x_s, \deg P_i = d_i > 0, \text{ord } P_i = 0 = m_i, 0 \leq i \leq s,$$

$$P_{s+1} = I, \deg P_{s+1} = 0, \text{ord } P_{s+1} = 1.$$

$$\deg P_j = d_j > 0, \text{ord } P_j = m_j > 0 \text{ si } s+2 \leq j \leq \nu.$$

Remarquons que par (4.2.2) (b) il existe un P_j tel que $\deg P_j = d_j > 0$ et $\text{ord } P_j = m_j > 0$.

Pour $Q \in \text{Der}_{\ell}^m(R)$ écrivons $Q = \sum a_{\alpha} P_{\alpha}$, $a_{\alpha} \in \mathbb{C}$, $0 \neq P_{\alpha}$ produit de P_j que l'on peut supposer par homogénéité de degré ℓ . Si P_j apparaît ℓ_j fois, $\ell_j \geq 0$, dans P_{α} on a donc :

$$(*) \deg P_{\alpha} = \ell = d_0 \ell_0 + \dots + d_s \ell_s + d_{s+2} \ell_{s+2} + \dots + d_{\nu} \ell_{\nu}.$$

Prenons $Q \in \text{Der}_{\ell}^m(R) \setminus (I \text{Der}_{\ell}^m(R) + \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R))$ avec $\ell \geq q_0$ et $m > \ell(m_0 + \dots + m_{\nu}) \geq 1$, c'est possible par

(4.2.2) (b). Remarquons que si $P_{s+1} = I$ apparaît dans un P_{α} , on peut toujours soustraire ce P_{α} à Q et finalement avoir $\ell_{s+1} = 0$ dans tout P_{α} .

Par (*) on a $\ell_i \leq \ell$ pour $i \geq s+2$ et il vient :

$$\text{ord } P_{\alpha} \leq \ell_{s+2} m_{s+2} + \dots + \ell_{\nu} m_{\nu} \leq \ell(m_0 + \dots + m_{\nu})$$

Donc $m = \text{ord } Q \leq \ell(m_0 + \dots + m_{\nu})$ et une contradiction.

4.4 Nous allons maintenant supposer que $\overline{\mathfrak{D}}$ n'est pas elliptique c'est à dire $N > 0$. Cette hypothèse sera en vigueur dans toute cette section.

Nous allons énoncer un résultat technique énoncé en ([I.1] Lemma 9), tiré de [V]. Rappelons que l'on a posé $d = \min \{d_i, 0 \leq i \leq s\} \geq 1$.

(4.4.1) LEMME Soit $\ell \leq mN+d-1$ avec $m \geq 1$. Avec les notations de (2.3.5) on a $\Psi_{m,\ell} = 0$. Donc $\Phi_{m,\ell} : H^0(\sigma_{m-1} \otimes \mathcal{B}^\ell) \rightarrow H^0(\sigma_m \otimes \mathcal{B}^\ell)$ est un isomorphisme donné par la multiplication par I .

Preuve C'est celle de ([I.1] Lemma 9) que l'on écrit avec les notations précédentes. Il faut remarquer qu'à la fin de cette démonstration on obtient une flèche $\mathbb{C} = H^0(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}}) \rightarrow H^1(\sigma_{m-1} \otimes \Omega^m) \rightarrow 0$; il s'agit de s'assurer que $H^1(\sigma_{m-1} \otimes \Omega^m) \neq 0$ pour conclure à l'isomorphisme (et à $\Psi_{m,mN} = 0$). Cela peut se montrer en considérant la longue suite exacte $(*)'_{m-1,mN}$ et en utilisant $H^1(\Omega) \neq 0$. Remarquons que l'on a $H^0(\mathcal{O}^m \otimes \mathcal{B}^{mN+j}) = H^0(\mathcal{B}^j)$ et la nullité de $\Psi_{m,mN+j}$ est évidente si $0 < j < d$ ou si $j < 0$.

(4.4.2) PROPOSITION Supposons $m \geq 1$ et $q_0 \leq \ell \leq mN+d-1$, alors $\text{Der}_\ell^1(R) = R_\ell I$ si $m = 1$

et $\text{Der}_\ell^m(R) = I \text{Der}_\ell^{m-1}(R) + \text{Der}_\ell^{m-1}(R)$ si $m \geq 2$.

Preuve : Cela résulte de (4.4.1) combiné avec (4.4.2) (a)

Nous voulons nous affranchir de la condition $\ell \geq q_0$ dans (4.4.2) nous commencerons par le résultat élémentaire suivant :

(4.4.3) LEMME : Il existe des éléments $f_1, \dots, f_v$ de R tels que $\mathfrak{X}_0 = \bigcup_{i=1}^v U_i$, $U_i = \text{Spec } R_{f_i}$ et :

$$\forall 1 \leq i \leq v, \exists \partial_i \in \text{Der}^1(R) \text{ de sorte que } \text{Der}^1(R_{f_i}) = R_{f_i} \cdot I \oplus R_{f_i} \partial_i.$$

Preuve : Rappelons que $R = \frac{\mathbb{C}[X_0, \dots, X_s]}{(F)} = \mathbb{C}[x_0, \dots, x_s] / \text{Sing } R = \{\mathfrak{M} = (x_0, \dots, x_s)\}$; on pose $V_i = \text{Spec } R_{x_i}$, on a donc V_i ouvert affine et $\mathfrak{X}_0 = \bigcup_{i=0}^s V_i$.

(1) Soit $P = (x_0 - \alpha_0, \dots, x_s - \alpha_s) \in \text{Max } R_{x_0}$, donc $\alpha_0 \neq 0$. Alors il existe $j, \ell \in \{0, \dots, s\}$ tels que

$$\mathcal{P} = \text{PR}_P = (x_j - \alpha_j, x_\ell - \alpha_\ell) \text{ avec } \alpha_j \neq 0.$$

La preuve de cette assertion est facile, esquissons la.

Si $x_0 - \alpha_0 \notin \mathcal{P}^2$, $j = 0$ convient. Si $x_0 - \alpha_0 \in \mathcal{P}^2$, supposons que $\mathcal{P} = (x_1, x_2)$ (quitte à renuméroter les x_j) et cherchons une contradiction. Il existe $\varphi \in R \setminus P$ tel que

$$(*) \quad \varphi(x_0 - \alpha_0) = \sum_{i_1, i_2} b_{i_1, i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \text{ avec } b_{i_1, i_2} \in R. \text{ Posons } \varphi = \sum_j \varphi^{(j)} \text{ avec } \varphi^{(j)} \text{ homogène et soit } \varphi^{(h)} \text{ la}$$

première composante n'appartenant pas à P , c'est à dire $\deg \varphi^{(j)} \geq \deg \varphi^{(j-1)}$, $\varphi^{(h+j)} \in P$ si $j \geq 1$, $\varphi^{(h)} \notin P$. Considérons la composante homogène de degré $d_0 + \deg \varphi^{(h)}$ du membre de gauche de $(*)$; comme $\deg x_0 \varphi^{(j)} < \deg x_0 \varphi^{(h)}$ si $j < h$ il vient $x_0 \varphi^{(h)} - \alpha_0 \varphi^{(q)} = \sum_{j_1, j_2} c_{j_1, j_2} x_1^{j_1} x_2^{j_2}$ (avec $q > h$).

Évaluant en P on trouve $x_0 \varphi^{(h)} \in P$ et $x_0 \notin P$, $\varphi^{(h)} \notin P$ donne la contradiction.

(2) Soit P comme en (1) ; alors I fait partie d'une base de $\text{Der}^1(R_P)$. En effet $E = \text{Der}^1(R_P)$ est libre de rang 2 sur R_P et $E/\mathfrak{P}E$ contient la classe de I qui est non nulle par $I * (x_j - \alpha_j) = d_j x_j$ et $x_j \notin \mathfrak{P}$. Par le lemme de Nakayama il existe donc $\partial \in \text{Der}^1(R_P)$ telle que $\text{Der}^1(R_P) = R_P I \oplus R_P \partial$.

(3) De (2) on déduit l'existence de $f \in R \setminus P$ tel que $\text{Der}^1(R_f)$ soit libre de base $\{I, \partial\}$ avec $\partial \in \text{Der}^1(R)$.

(4) Par (3) on peut recouvrir $\text{Spec } R_{X_0}$ par des ouverts $\text{Spec } R_{f_j}$, $j \in \{1, \dots, v_0\}$ tels que $\text{Der}^1(R_{f_j})$ soit libre de base $\{I, \partial_j\}$. On fait cette construction pour tous les $\text{Spec } R_{x_i}$, $0 \leq i \leq s$; la collection des $\text{Spec } R_{f_j} = U_j$, $1 \leq j \leq v_i$, $0 \leq i \leq s$, convient.

(4.4.4) LEMME : On conserve les notations de (4.4.3). Dans l'anneau $\text{gr } \mathfrak{D}(R_f)$ l'idéal engendré par le symbole de I est premier.

Preuve : Posons $f = f_j$; puisque R_f est régulier on a $\text{gr } \mathfrak{D}(R_f) = S_{R_f}(\text{Der}^1(R_f))$ (l'algèbre symétrique du module $\text{Der}^1(R_f)$).

Donc de $\text{Der}^1(R_f) = R_f \cdot I \oplus R_f \partial$, $\partial = \partial_j$, on déduit le résultat.

Au vu de (4.4.4) il est raisonnable de supposer que $\sigma(I)$ engendre un idéal radical de $\text{gr } \mathfrak{D}(R)$, ce que nous ferons dans la proposition qui suit.

(4.4.5) PROPOSITION : Supposons $d = 1$, i.e. $H^0(\mathfrak{Z}) \neq 0$; alors si $m \geq 1$ et $\ell \leq mN$ on a $\text{Der}_{\ell}^1(R) = R_{\ell} I$ si $m = 1$ et $\text{Der}_{\ell}^m(R) = I \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R) + \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R)$ si $m \geq 2$.

Preuve : Soit $D \in \text{Der}_{\ell}^m(R)$. Prenons $m \geq 2$, le cas $m = 1$ étant analogue. Si $\ell = 0$ on a le résultat par (3.3.5). Si $\ell \geq 1$,

$D^{q_0} \in \text{Der}_{\ell q_0}^{mq_0}(R)$ et de (4.4.2), puisque $q_0 \leq \ell q_0 \leq (mq_0)N$ si $\ell \leq mN$, on tire :

$$D^{q_0} \in I \text{Der}_{\ell q_0}^{mq_0-1}(R) + \text{Der}_{\ell q_0}^{mq_0-1}(R).$$

En passant dans $\text{gr } \mathfrak{D}(R)$ on trouve $\sigma(D)^{q_0} \in \sigma(I) \text{gr } \mathfrak{D}(R)$. On en déduit $\sigma(D) \in \sigma(I) \text{gr } \mathfrak{D}(R)$ et le résultat.

Ainsi pour tout $j \in \{1, \dots, v\}$ il existe $P_j, T_j \in \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R_{f_j})$ tels que $D = I P_j - T_j$; alors $I(P_j - P_k) = T_j - T_k$ pour $1 \leq j, k \leq v$ sur $U_j \cap U_k$. En raisonnant comme dans la preuve de (4.4.2) on trouve $D \in I \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R) + \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R)$.

(4.4.6) La condition $d = 1$ est vérifiée dans les exemples suivants :

(a) $\mathfrak{Z}$ quelconque, $\mathfrak{Z} = \Omega$. (b) $\mathfrak{Z} = \text{Proj } \frac{S}{FS}$, $\mathfrak{Z} = \mathfrak{O}_{\mathfrak{Z}}(1)$ comme en (4.1.3)

(et bien sûr pour $\mathfrak{Z}$ elliptique, $\mathfrak{Z}$ quelconque mais ceci a été exclu de cette section).

(4.4.7) Pour simplifier et compte tenu de (4.4.5) nous supposons désormais que :

$$\forall 0 \leq \ell \leq mN+d-1, \text{Der}_{\ell}^m(R) = I \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R) + \text{Der}_{\ell}^{m-1}(R) \text{ si } m \geq 2 \text{ et } \text{Der}_{\ell}^1(R) = R_{\ell} I \text{ si } m = 1.$$

(cela est vrai pour $\ell = 0$ par (3.3.3)).

(4.4.8) COROLLAIRE : Fixons $k > 0$ et soit $D \in \text{Der}_{Nk+d}^m(R)$. Supposons que $D = f D_1 D_2 \dots D_r$ avec $f \in R$ et $D_i \in \text{Der}(R)$ homogène et d'ordre $< k$, pour tout i . Alors il existe P d'ordre $< k$ tel que $D = I\Delta + P$, $\Delta \in \text{Der}^{m-1}(R)$.

Preuve : Ce résultat est celui de ([V] Lemme 3), la preuve est identique, rappelons la. Si $m < k$ il n'y a rien à montrer ; supposons donc $m = \text{ord}(D) \geq k$ (donc $r \geq 2$). Il existe j tel que $\deg D_j \leq N \text{ord } D_j + d - 1$ sinon $\deg D = \sum_i \deg D_i \geq mN + rd$ et alors $Nm + rd \leq Nk + d$ ce qui est contradictoire.

Par (4.4.7) $D_j \in I \text{Der}_{\ell}^{p-1}(R) + \text{Der}_{\ell}^{p-1}(R)$, où $\ell = \deg D_j$, $p = \text{ord } D_j$. On en déduit $D = I D' + D''$ avec D'' somme d'opérateurs du même type que D mais d'un ordre strictement inférieur. Une récurrence termine la preuve.

On peut maintenant démontrer l'analogue de ([V] Proposition 5).

(4.4.9) PROPOSITION : Fixons $k > 0$, notons H_1^k le sous-espace vectoriel de $\text{Der}_1^k(R)$ formé des sommes de produits d'opérateurs d'ordre $< k$. Alors on a : $\text{Der}_{Nk+d}^k(R) \supsetneq H_{Nk+d}^k$.

Preuve : Un élément D de H_{Nk+d}^k s'écrit $D = \sum f D_1 D_2 \dots D_r$ avec $f D_1 D_2 \dots D_r \in \text{Der}^m(R)$ vérifiant

les hypothèses de (4.4.8). Donc $D = \sum (I\Delta + P)$ avec $\text{ord } P < k$, après une mise en facteur $D = I D' + D''$ avec D''

d'ordre $< k$. Comme on a nécessairement $\text{ord } D' < k$, il vient :

$$H_{Nk+d}^k = I \text{Der}_{Nk+d}^{k-1}(R) + \text{Der}_{Nk+d}^{k-1}(R).$$

L'assertion découle donc de (4.2.2) (b).

Comme dans ([V] Théorème) il vient :

(4.4.10) THEOREME : L'algèbre $\mathfrak{D}(R)$ n'est pas de type fini sur $\mathbb{C}$.

Preuve : Si $\mathfrak{D}(R)$ était engendrée par un nombre fini d'éléments, il existerait $k > 0$ tel que : $\text{Der}_{Nk+d}^k(R) = H_{Nk+d}^k$, (par homogénéité), avec H_{Nk+d}^k comme dans (4.4.9). D'où une contradiction.

(4.4.11) THEOREME : Pour $k \geq 0$ on pose : $C_k = \{i \in \mathbb{N}^* / i = pN + d, p \geq k\}$,

$$\mathfrak{J}_k = \sum_{C_k} \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_{pN+d}^{p-1}(R) + \sum_{\mathbb{N}^* \setminus C_k} \mathfrak{D}_i(R)$$

Alors $(\mathfrak{J}_k)$ est une suite croissante d'idéaux bilatères de $\mathfrak{D}(R)$ et $\mathfrak{J}_{k+1} \supsetneq \mathfrak{J}_k$ si $kN + d \geq q_0$. En particulier $\mathfrak{D}(R)$ n'est pas noethérien.

Preuve : De (4.4.7) il découle facilement que :

$\forall m \geq 1, \forall 0 \leq \ell \leq mN+d-1, \mathfrak{D}_\ell(R) = \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_\ell^{m-1}(R)$. Ceci implique en particulier $\mathfrak{D}_\ell(R) = 0$ pour

$0 < \ell < d$. Montrons que $\mathfrak{J}_k \subseteq \mathfrak{J}_{k+1}$. Par définition $C_k = C_{k+1} \cup \{kN+d\}$ et $\mathfrak{J}_k$ est égal à

$$\sum_{C_{k+1}} \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_{pN+d}^{p-1}(R) + \sum_{N^* \setminus C_k} \mathfrak{D}_i(R) + \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_{kN+d}^{k-1}(R) \text{ qui est contenu dans } \sum_{C_{k+1}} \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_{pN+d}^{p-1}(R) \\ + \sum_{N^* \setminus C_k} \mathfrak{D}_i(R) + \mathfrak{D}_{kN+d}(R) \text{ ce qui n'est autre que } \mathfrak{J}_{k+1}.$$

Montrons que $\mathfrak{J}_k$ est un idéal de $\mathfrak{D}(R)$. Par (3.3.4) $\mathfrak{D}_0(R) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{C} I^n$ et il est clair que $\mathfrak{D}_0(R) \mathfrak{J}_k + \mathfrak{J}_k \mathfrak{D}_0(R) \subseteq \mathfrak{J}_k$.

Par définition

$$\mathfrak{J}_k \cap \mathfrak{D}_i(R) = \begin{cases} \mathfrak{D}_i(R), i \in N^* \setminus C_k \\ \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_{pN+d}^{p-1}(R), i = pN+d \in C_k \end{cases}$$

Il suffit donc d'établir, pour $i > 0$ et $t > 0$, l'assertion suivante : (#) $\mathfrak{D}_i(R) \mathfrak{D}_t(R) \subseteq \mathfrak{J}_0$.

Remarquons que (#) est triviale si $0 < i < d$, on supposera donc $d \leq i$.

Soient $m \geq 1$ et $\alpha \geq 1$ tels que $(m-1)N < t \leq mN$ et $(\alpha-1)N+d-1 < i \leq \alpha N+d-1$. De $t \leq mN$ et $i \leq \alpha N+d-1$ on tire

$\mathfrak{D}_t(R) = \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_t^{m-1}(R)$ et $\mathfrak{D}_i(R) = \sum_{n \geq 0} I^n \mathfrak{D}_i^{\alpha-1}(R)$. Comme $\mathfrak{D}_t^{m-1}(R) \cdot \mathfrak{D}_i^{\alpha-1}(R) \subseteq \mathfrak{D}_{i+t}^{\alpha+m-2}(R)$, il suffit pour obtenir (#) de prouver que $\mathfrak{D}_{i+t}^{\alpha+m-2}(R) \subseteq \mathfrak{J}_0 \cap \mathfrak{D}_{i+t}(R)$. Si $i+t \in N^* \setminus C_0$ on a $\mathfrak{D}_{i+t}(R) \subseteq \mathfrak{J}_0$ et (#) est vraie.

Supposons $i+t = pN+d$ et montrons que $\alpha+m-2 \leq p-1$, ce qui prouvera (#). Sinon $p \leq \alpha+m-2$ et de $-t < -(m-1)N$ il vient $i = pN+d-t < (\alpha+m-2)N+d-(m-1)N = (\alpha-1)N+d$, contredisant le choix de α .

Comme en (4.3.3) on remarque que :

$$\mathfrak{J}_k \cap \text{Der}_{kN+d}^k(R) = I \text{Der}_{kN+d}^{k-1}(R) + \text{Der}_{kN+d}^{k-1}(R) \subseteq \mathfrak{J}_{k+1} \cap \text{Der}_{kN+d}^k(R) = \text{Der}_{kN+d}^k(R).$$

Par (4.2.2) (b) cette inclusion est stricte dès que $kN+d \geq q_0$. Ceci achève la preuve du théorème

(4.4.12) Rappelons que (4.4.10) et (4.4.11) sont vrais sous l'hypothèse (4.4.7).

D'autre part si $N = 0$ les mêmes résultats ont été démontrés en (4.3.3 et 4.3.4)

4.5 Ici, comme dans 3.4 on peut obtenir les mêmes résultats en remplaçant $\mathfrak{D}(R)$ par l'anneau des germes d'opérateurs différentiels analytiques au voisinage de 0.

5. OPERATEURS DIFFERENTIELS SUR LES SURFACES NORMALES MUNIES D'UNE BONNE C^* -ACTION

5.1 Afin d'étudier $\mathcal{D}(A)$ pour une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini A , graduée, normale, de dimension 2, on va rappeler quelques résultats de [O.W] et [P.2].

(5.1.1.) Soit $A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$ un anneau normal gradué de dimension 2 avec $A_0 = \mathbb{C}$ et A noethérien. Posons $\mathcal{Y} = \text{Spec } A$ et désignons par $\{O\}$ le point fermé correspondant à l'idéal maximal $\bigoplus_{k > 0} A_k$, on a donc $\text{Sing } \mathcal{Y} \subset \{O\}$.

Si $\text{Sing } \mathcal{Y} = \emptyset$, A est un anneau de polynômes et l'anneau $\mathcal{D}(A)$ est une algèbre de Weyl, pour cette raison nous ne nous intéresserons qu'au cas $\text{Sing } \mathcal{Y} = \{O\}$. Pour abréger l'écriture nous dirons que $\mathcal{Y}$ est une $\mathbb{C}^*$ -surface normale, cf [P.2].

Un exemple est évidemment fourni par les $R(\tilde{\mathcal{X}}, \mathcal{B})$ du § 1.

(5.1.2) Comme pour toute surface il existe une bonne résolution minimale $\pi: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ de la singularité isolée en O . Si $\pi^{-1}(O) = E_1 \cup \dots \cup E_t$, on a :

(i) Les E_j sont des courbes projectives lisses à croisement normaux.

(ii) Le cardinal de $E_i \cap E_j$, est ≤ 1 si $i \neq j$.

(iii) $E_i \cap E_j \cap E_k = \emptyset$ si i, j, k 2 à 2 distincts.

A cette résolution on associe un graphe (pondéré) de la manière suivante :

- les sommets sont les E_j affectés du poids $-b_j = (E_i \cdot E_j)$ (on note comme d'habitude $(E_i \cdot E_j)$ le nombre d'intersection de E_i et E_j).

- Une arête $\overset{\bullet}{\underset{j}{\text{---}}} \overset{\bullet}{\text{---}}$ existant si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$.

(5.1.3) Supposons que $\mathcal{Y}$ soit une $\mathbb{C}^*$ -surface normale, deux cas sont alors possibles pour la résolution (5.1.2).:

(a) On a $E_j \cong \mathbb{P}^1$ pour tout j et le graphe de la résolution est

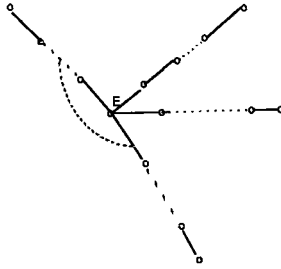
$$\overset{0}{-b_1} \text{---} \overset{0}{-b_2} \text{---} \overset{0}{\text{---}} \text{---} \overset{0}{-b_r}$$

Alors la singularité de $\mathcal{Y}$ est analytiquement isomorphe à une singularité cyclique quotient $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_m$ de type (m, e) . C'est à

dire $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_m = \text{Spec } \mathbb{C}[X, Y]^{\mathbb{Z}_m}$, $\mathbb{Z}_m$ opérant par $(X, Y) \mapsto (\xi X, \xi^e Y)$ où ξ racine primitive m -ième de l'unité et $1 \leq e < m$, e et m premiers entre eux. Le type (m, e) étant déterminé par le développement en fractions continues : $[b_1, \dots, b_r] = \frac{m}{e} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 \dots}}$. On dira ici aussi que $\mathcal{Y}$ est une singularité cyclique quotient de type (m, e) .

(b) Il existe une unique courbe E parmi les E_j ayant l'une des deux propriétés suivantes : E intersecte plus de deux autres E_j , ou le genre de E est ≥ 1 . On dit alors que E est la courbe centrale.

Si $E_j \neq E$ on a $E_j = \mathbb{P}^1$ et le graphe de la résolution a la forme d'une étoile à n branches :



chaque branche étant : $\begin{array}{ccccc} E & E_{i,1} & & E_{i,x_i} & \\ \circ & \text{---} \circ & \text{---} \circ & \text{---} \circ & \\ -b & -b_{i,1} & & -b_{i,x_i} & \end{array}$ avec $b_{i,j} = -(E_{i,j}, E_{i,j}) \geq 2$ et $b = -(E, E) \geq 1$.

On détermine des entiers e_i, d_i premiers entre eux tels que $1 \leq e_i < d_i$ par le développement $\frac{d_i}{e_i} = [b_{i,1}, b_{i,2}, \dots, b_{i,x_i}]$.

On sait par [O.W] que le graphe "détermine" (à isomorphisme analytique près) la singularité de $\mathcal{Y}$, cf. [P.2] pour un énoncé précis.

(5.1.4) Soit $\mathcal{Y} = \mathfrak{X} = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L})$ comme au § 1. Alors $\tilde{\mathcal{Y}} = \mathcal{V}(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L}) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{X}$, comme en (1.1.5), donne le graphe :

$$\begin{array}{c} \circ \\ -b = \deg \mathfrak{L} \end{array}, \text{ avec } E = \pi^{-1}(O) \cong \bar{\mathfrak{X}}.$$

(5.1.5) L'importance des surfaces $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L})$ est illustrée par le théorème suivant de [P.2].

THEOREME : Soit $\mathcal{Y}$ une $\mathbb{C}^*$ -surface normale. Alors il existe une courbe projective lisse $\bar{\mathfrak{X}}$, un groupe fini G d'automorphismes de $\bar{\mathfrak{X}}$, un faisceau inversible ample et G -invariant $\mathfrak{L}$ tels que :

(a) G opère librement sur $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L})$ en dehors de $\{O\}$.

(b) La singularité de $\mathcal{Y}$ est (analytiquement) isomorphe à celle de $\mathfrak{X}/G = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L})^G$.

Remarque : Il est démontré dans [R], qu'avec les notations du théorème précédent, la surface $\mathcal{Y}$ est algébriquement isomorphe à un quotient $\mathfrak{X}/G = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{L})^G$ et que l'on peut prendre G abélien (fini).

(5.1.6) Nous voulons donner des exemples de $\mathbb{C}^*$ -surfaces normales $\mathcal{Y}$ à singularité rationnelle telles que $\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ ne soit pas simple et pas noethérien. Avant cela nous devons rappeler la définition d'une singularité rationnelle.

Soit $\mathcal{Y}$ une variété irréductible affine et normale. On dit que $\mathcal{Y}$ est à singularités rationnelles ($\mathcal{Y}$ est R.S. pour simplifier) si pour une, et alors toute, résolution des singularités $\pi: \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}$ on a $R^j \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}} = 0$ pour $j \geq 1$. C'est une condition locale et analytique.

Lorsque $\mathcal{Y}$ est une surface cette condition s'écrit $\dim H^1(\tilde{\mathcal{Y}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{Y}}}) = 0$.

(5.1.7) Exemple. Considérons $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{B})$ comme au § 1. On a la résolution : $\pi: \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{X}$ de (1.1.5).

Utilisant la projection $p: \mathcal{V} \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}$, on obtient :

$$H^1(\mathcal{V}, \mathcal{O}_{\mathcal{V}}) = \bigoplus_{j \geq 0} H^1(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{B}^j).$$

Ainsi $\mathfrak{X}$ est R.S. si et seulement si $\bar{\mathfrak{X}} = \mathbb{P}^1$.

(5.1.8) Soit $\mathcal{Y}$ une $\mathbb{C}^*$ -surface normale, on peut décider à l'aide de (5.1.3) si $\mathcal{Y}$ est R.S. En effet par [P.2] :

(a) Si $\mathcal{Y}$ est une singularité cyclique quotient $\mathcal{Y}$ est R.S.

(b) Sinon, $\mathcal{Y}$ est R.S. si et seulement si la courbe centrale est rationnelle et $\forall k > 0, kb - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{ke_i}{d_i} \right\rfloor > -2$ (où {a}

est le plus petit entier $\geq a$).

On pourra également consulter [Wa] pour une autre approche de ce critère.

(5.1.9) Grâce à [P.2] on dispose d'une méthode pour construire les singularités de $\mathbb{C}^*$ -surfaces normales, dont le graphe de la résolution est comme en (5.1.3). Résumons cette construction. Soient E une courbe projective lisse, D un diviseur sur E , $P_1, \dots, P_n$ des points de E , $(e_i, d_i)_{1 \leq i \leq n}$ des couples d'entiers premiers entre eux avec $1 \leq e_i < d_i$. Formons les diviseurs :

$$D^{(k)} = kD - \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{ke_i}{d_i} \right\rfloor P_i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Notons $b = \deg D = \deg \mathcal{O}_E(D)$, alors si $b - \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{d_i} > 0$, l'anneau $A = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(D^{(k)}))$ est tel que $\mathcal{Y} = \text{Spec } A$ et

est une $\mathbb{C}^*$ -surface normale ayant le graphe demandé. Une description analogue due à M. Demazure est donnée dans [Wa].

5.2. Compte tenu de (5.1.5), l'étude des anneaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}(\mathcal{Y})$ pour $\mathcal{Y}$ $\mathbb{C}^*$ -surface normale (tout au moins des germes d'opérateurs différentiels en $\{O\}$) se décompose en l'étude de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\bar{\mathfrak{X}}, \mathfrak{B})$, suivie de l'action d'un groupe fini opérant librement en dehors de $\{O\}$. Nous allons détailler ce dernier point, l'étude de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ ayant été (partiellement) faite aux § 3 et § 4.

Les résultats qui vont suivre apparaissent dans [L], [I.2] et [I.3] ; toutes les notions utilisées y sont définies.

(5.2.1) **PROPOSITION** : Soit B une $\mathbb{C}$ -algèbre, G un sous-groupe fini de $\text{Aut}_{\mathbb{C}} B$. On pose $A = B^G$, l'anneau des invariants, et on suppose qu'il existe $Z \subset \text{Spec } B$ tel que :

- $$\begin{cases} \text{(i)} \quad \forall p \in Z, \text{ prof } B_p \geq 2 \\ \text{(ii)} \quad \text{Le morphisme naturel } \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A \text{ est étale en dehors de } Z. \end{cases}$$

Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a des isomorphismes naturels (induits par la restriction) :

$$\text{Der}^m(A) \cong (\text{Der}^m(B))^G$$

$$\mathfrak{D}^m(A) \cong \mathfrak{D}^m(B)^G.$$

Et ainsi $\mathfrak{D}(A) \cong \mathfrak{D}(B)^G$.

On rappelle que G opère sur $\mathfrak{D}(B)$ par :

$$\forall g \in G, \forall D \in \mathfrak{D}(B), \forall \varphi \in B, (gD) * \varphi = g[D * (g^{-1}\varphi)].$$

(5.2.2) COROLLAIRE Soient B, G comme en (5.2.1) ; on suppose de plus que B est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini ayant la propriété (S_2) : $\forall p \in \text{Spec } B, \text{prof } B_p \geq \inf(2, \text{ht}_p)$. Pour $p \in \text{Spec } B$ on pose : $G_i(p) = \{g \in G/g \text{ induit l'identité sur } B/p\}$.

On suppose que $Z = \{p \in \text{Spec } B / G_i(p) \neq 1\}$ vérifie $\text{codim}_{\text{Spec } B} Z \geq 2$. Alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \text{Der}^m(B^G) \cong [\text{Der}^m(B)]^G \text{ et donc}$$

$$\mathfrak{D}(B)^G \cong \mathfrak{D}(B^G).$$

Preuve : L'hypothèse faite sur Z assure que $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ est étale en dehors de Z ; comme B vérifie (S_2) on a $\text{prof } B_p \geq 2$ pour $p \in Z$ et on applique (5.2.1).

(5.2.3) Rappelons quelques résultats bien connus sur l'action d'un groupe fini sur une $\mathbb{C}$ -algèbre, cf [Mo]. Nous les écrirons dans le cadre de ce qui précède. Soient B une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini et $G \subset \text{Aut}_{\mathbb{C}} B$. On suppose B intègre.

Alors :

(a) $\mathfrak{D}(B)$ est un anneau simple si et seulement si $\mathfrak{D}(B)^G$ l'est.

(b) Si $\mathfrak{D}(B)^G$ est noethérien alors $\mathfrak{D}(B)$ est un $\mathfrak{D}(B)^G$ -module de type fini (à droite et à gauche). En particulier $\mathfrak{D}(B)$ est alors noethérien et si $\mathfrak{D}(B)^G$ est de plus une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini c'est aussi le cas pour $\mathfrak{D}(B)$.

(c) Inversement si $\mathfrak{D}(B)$ est noethérien $\mathfrak{D}(B)^G$ l'est aussi.

(5.2.4) On peut maintenant donner une description des opérateurs différentiels sur une $\mathbb{C}^*$ -surface normale, ceci grâce à (5.1.5).

THEOREME : Soient $\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z}, G$ comme en (5.1.5). On pose $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z})$, alors :

$$(a) \mathfrak{D}(\mathfrak{X})^G \cong \mathfrak{D}(\mathfrak{X}/G)$$

$$(b) \mathfrak{D}(\mathfrak{X}/G) \text{ est un anneau noethérien si et seulement si } \mathfrak{D}(\mathfrak{X}) \text{ l'est.}$$

$$(c) \mathfrak{D}(\mathfrak{X}/G) \text{ est un anneau simple si et seulement si } \mathfrak{D}(\mathfrak{X}) \text{ l'est.}$$

Preuve (a) On vérifie aisément que (5.2.2) s'applique à $B = R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z})$.

(b) et (c) sont conséquences de (5.2.3).

(5.2.5) On conserve les notations de (5.2.4). De (3.2.2) on déduit :

COROLLAIRE : Si le genre de $\tilde{\mathfrak{X}}$ est ≥ 1 , $\mathfrak{D}(\mathfrak{X})$, et donc $\mathfrak{D}(\mathfrak{X}/G)$, n'est pas simple.

(5.2.6) Si $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathbb{P}^1$ et $\mathfrak{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(n)}$ on a vu en (1.4.2) que $R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z}) = \mathbb{C}[X, Y]^{\mathbb{Z}_n}$, la description de l'action de $\mathbb{Z}_n$ donnée alors permet d'utiliser (5.2.2) et (5.2.3) (ou même (5.2.4)), on en déduit que $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ est une $\mathbb{C}$ -algèbre noethérienne qui est simple ; on peut voir facilement que c'est une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini. Il en découle que $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/G)$ est un anneau simple noethérien (et même une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini).

Notons que ceci traite le cas des singularités cycliques quotients et justifie le fait que l'étude de $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ ait été menée sous l'hypothèse $g \geq 1$ aux § 3 et § 4.

Il faut noter que l'anneau des opérateurs différentiels sur $\mathbb{C}[X, Y]^G$, G groupe fini, a été traité pour la première fois par J.M. Kantor (cf. [L]).

(5.2.7) Lorsque $R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z})$ est un anneau de Gorenstein on a :

COROLLAIRE : On suppose $g \geq 1$ et qu'il existe N tel que $\mathfrak{Z}^N \cong \Omega$. Si $g = 1$ ou sous l'hypothèse (4.4.7), on a :

- (a) $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/G)$ ne sont pas noethériens.
- (b) $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ n'est pas une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini.

Preuve : (a) résulte de (4.3.3) et (4.4.11) suivis de (5.2.4).

(b) résulte de (4.3.4) et (4.4.10).

Remarque : Il est probable que $\mathcal{D}(\mathfrak{X}/G)$ n'est pas une $\mathbb{C}$ -algèbre de type fini.

(5.2.8) Rappelons que le corollaire (5.2.7) s'applique dans les cas suivants :

- (a) $\tilde{\mathfrak{X}}$ elliptique $\mathfrak{Z}$ quelconque.
- (b) $\tilde{\mathfrak{X}}$ quelconque de genre ≥ 1 , $\mathfrak{Z} = \Omega$.
- (c) $\tilde{\mathfrak{X}} = \text{Proj} \frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{(F)}$, $\deg X = \deg Y = \deg Z = 1$, F polynôme homogène et
 $\mathfrak{Z} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2(1)}|_{\tilde{\mathfrak{X}}}$ de sorte que $R = \frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{(F)}$.

Le cas (a) généralise donc [B.G.G], le cas (c) avait déjà été traité dans [V].

5.3 Nous allons appliquer les résultats de 5.2 pour donner des exemples de $\mathbb{C}^*$ -surfaces à singularités rationnelles telles que l'anneau des opérateurs différentiels associé ne soit ni simple ni noethérien. Avant de passer aux exemples expliquons rapidement la raison de cette question : comme nous l'avons noté dans l'introduction tous les exemples connus de variétés $\mathfrak{Y}$ telles que $\mathcal{D}(\mathfrak{Y})$ ait un "bon" comportement sont R.S., de plus la discussion de 5.2 a montré que si $\mathfrak{X} = \text{Spec } R(\tilde{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Z})$ $\mathcal{D}(\mathfrak{X})$ est simple si et seulement si $\tilde{\mathfrak{X}} = \mathbb{P}^1$ c'est à dire si et seulement si $\mathfrak{X}$ est R.S. (cf. (5.1.7)). Il est donc tentant de voir si cette condition géométrique est suffisante pour assurer un "bon" anneau d'opérateurs différentiels.

(5.3.1) Nous allons reprendre un des exemples de [P.2].

On part de $E = \mathbb{P}^1$, $n = 4$, $e_i = 1$, $d_i = 2$, $1 \leq i \leq 4$, $D = 3P_4$ et $b = 3$, dans les notations de (5.1.9) ; on fixe $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $P_1 = O$, $P_2 = 1$, $P_3 = a$, $P_4 = \infty$. On trouve un anneau $A = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(D^{(k)}))$ ayant la présentation $A \cong \frac{\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2]}{J}$, $\deg X_j = 2$, $\deg Y_i = 3$, J étant l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de la matrice

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & Y_1 \\ X_2 & X_3 & Y_2 \\ Y_1 & Y_2 & (X_3 - X_2)(X_2 - aX_1) \end{pmatrix}$$

Le critère de (5.1.8) montre que $\text{Spec } A$ est R.S. Pour appliquer les résultats de 5.2 il nous faut montrer que $A \cong R^G$ avec $R = R(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E})$ tel que $\mathcal{D}(R)$ ne soit ni simple ni noethérien. En examinant la démonstration de [P.2] cela n'est pas difficile et on obtient la description suivante.

Soient : $\tilde{\mathcal{E}}$ la courbe elliptique d'équation dans $\mathbb{P}^2$: $Y^2 Z = X(X-Z)(X-aZ)$.

$Q_1 = (O, O, 1)$, $Q_2 = (1, O, 1)$, $Q_3 = (a, O, 1)$, $Q_4 = (O, 1, O)$, ce sont des points sur $\tilde{\mathcal{E}}$.

Δ le diviseur $5Q_4 - Q_1 - Q_2 - Q_3$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Delta)$.

G le sous-groupe de $\text{Aut } \tilde{\mathcal{E}}$ défini par $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha, -\beta, \gamma)$, donc $G \cong \mathbb{Z}_2$.

On a : $R(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) \cong R = \frac{\mathbb{C}[U, Z_1, Z_2]}{(U^2 - Z_1 Z_2^3 + (a+1)Z_1^2 Z_2^2 - aZ_1^3 Z_2^2)}$

avec $\deg U = 2$, $\deg Z_i = 1$. Le groupe G opère sur R par $(U, Z_1, Z_2) \rightarrow (-U, -Z_1, Z_2)$. On vérifie que $A \cong R^G$.

Comme $\tilde{\mathcal{E}}$ est elliptique $\mathcal{D}(R)$ et $\mathcal{D}(A)$ ne sont ni simples ni noethériens ; on a vu que $\text{Spec } A$ est R.S.

(5.3.2) L'exemple suivant est tiré de ([W.1] § 4.8).

Soient : $E = \mathbb{P}^1$, $n = 3$, $e_i = 1$, $d_i = 3$, $1 \leq i \leq 3$, $P_1 = O$, $P_2 = 1$, $P_3 = \infty$, $D = 2P_3$, notations (5.1.9).

L'algèbre $A = \bigoplus_{k \geq 0} H^0(E, \mathcal{O}_E(D^{(k)}))$ est donnée par :

$$A \cong \frac{\mathbb{C}[U_0, U_1, V_1, V_2, V_3, V_4]}{J}, \quad \deg U_i = 2, \deg V_j = 3$$

où J est l'idéal engendré par les mineurs 2×2 de

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & U_0 \\ V_2 & V_3 & V_4 & U_1 \\ U_0^2 & U_0 U_1 & U_1^2 & V_3 \cdot V_2 \end{pmatrix}$$

Par (5.1.8) $\text{Spec } A$ est R.S.

Soit maintenant $\tilde{\mathcal{E}}$ la courbe elliptique d'équation $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$ dans $\mathbb{P}^2$; on considère les points de $\tilde{\mathcal{E}}$: $Q_1 = (O, -1, 1)$, $Q_2 = (O, -\omega, 1)$, $Q_3 = (O, -\omega^2, 1)$ ω étant une racine primitive 3-ième de l'unité.

Si $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{E}}}(\Delta)$ et $\Delta = 5Q_3 - Q_1 - Q_2$ on a :

$$R(\tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{E}) \cong R \cong \frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{(X^3 + Y^3 + Z^3)}, \quad \deg X = \deg Y = \deg Z = 1.$$

Le groupe $G = \mathbb{Z}_3$ opère sur $\mathfrak{A}$ par $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\omega\alpha, \beta, \gamma)$, et donne l'action sur $R : (X, Y, Z) \mapsto (\omega^2 X, \omega Y, \omega Z)$.

On montre que $R^G \cong A$, comme $\mathfrak{D}(R)$ n'est ni simple ni noethérien ; il en est de même pour $\mathfrak{D}(A)$ et on a vu que $\text{Spec } A$ est R.S.

REFERENCES

- [B.G.G.] I.M. BERNSTEIN, I.M. GELFAND and S.I. GELFAND : *Differential operators on the cubic cone*.
Russian Math. Surveys, 27 (1972) 466-488
- [E.G.A.] A. GROTHENDIECK : *Eléments de Géométrie Algébrique. Chapitres II et IV*. Publ. I.H.E.S. n° 8 et 32
(1961 et 1967)
- [G.W.] S. GOTO and K. WATANABE : *On graded Rings I*. J. Math. Soc. Japan. Vol 30 n° 2 (1978) 179-213.
- [H] R. HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Math. Vol 52 (1983) Springer Verlag
- [I.1.] Y. ISHIBASHI : *Remarks on a Conjecture of Nakai*. J. of Algebra 95 (1985) 31-45.
- [I.2.] Y. ISHIBASHI : *Nakai's Conjecture for invariant subrings*. Hiroshima Math. J. 15 (1985) 429-436.
- [I.3.] Y. ISHIBASHI : *A Note on Nakai's Conjecture for invariant subrings*. Comm. in Algebra 15 (1987) 1349-1356.
- [L] T. LEVASSEUR : *Anneaux d'opérateurs différentiels*.
Séminaire d'Algèbre M.P. Malliavin L.N. in Math. Vol 867 Springer Verlag (1981) 157-173.
- [L.Sm] T. LEVASSEUR and S.P. SMITH : *Primitive ideals and nilpotent orbits in type G_2* .
J. of Algebra 114 n° 1 (1988) 81-105.
- [L.S.S] T. LEVASSEUR, S.P. SMITH and J.T. STAFFORD : *The minimal nilpotent orbit, the Joseph Ideal and differential operators*. J. of Algebra, to appear
- [L.St] T. LEVASSEUR and J.T. STAFFORD : *Rings of differential operators on classical rings of invariants*.
Preprint, (1988)
- [Mo] S. MONTGOMERY : *Fixed rings of Finite Automorphism groups of Associative Rings*.
L.N. in Maths. Vol 818. Springer Verlag (1980)
- [Mu] I.M. MUSSON : *Rings of Differential operators on Invariant Rings of Tori*.
Trans. of the Amer. Math. Soc. Vol 303, n° 2. (1987), 805-827.
- [O.W] P. ORLIK and P. WAGREICH : *Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ -action*.
Ann. of Math. 93 (1971) 205-228.

- [P.1.] H.C. PINKHAM : *Deformations of Cones with negative Grading.* J. of Algebra 30 (1974) 92-102.
- [P.2.] H.C. PINKHAM : *Normal surface singularities with $\mathbb{C}^*$ -action.* Math. Annalen 227 (1977) 183-193.
- [R] B. RUNGE : *Quasihomogeneous Singularities.* Math. Annalen. 281 (1988), 295-313.
- [S.S] S.P. SMITH and J.T. STAFFORD : *Differential operators on an affine curve.* Proc. London Math. Soc., to appear
- [V] J.P. VIGUE : *Opérateurs différentiels sur les cônes normaux de dimension 2.*
C.R. Acad. Sci. Paris tome 278 (1974) 1047-1050.
- [W.1] J. WAHL : *Equations defining Rational Singularities.* Ann. Sc. Ec. Normale Sup. 10 (1977) 231-264.
- [W.2] J. WAHL : *Derivations of Negative Weight and Non-Smoothability of Certain Singularities.*
Math. Ann. 258 (1982) 383-398.
- [W.3] J. WAHL : *A cohomological characterization of $\mathbb{P}^n$.* Inv. Math. 72 (1983) 315-322.
- [Wa] K. WATANABE : *Some remarks concerning Demazure's Construction of normal graded rings.*
Nagoya Math. J. vol 83 (1981) 203-211.