D-MODULES ET DISTRIBUTIONS SPHÉRIQUES (LE CAS TANGENT)

THIERRY LEVASSEUR

Exposé du 5 novembre 2004 au groupe de recherche « Analyse harmonique invariante ».

1. Généralités

Notations. Si $\mathbf{X}$ est une variété algébrique complexe, son faisceau structural est noté $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ et l'algèbre des fonctions globalement définies sur $\mathbf{X}$ est alors $\mathcal{O}(\mathbf{X}) = \Gamma(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. On désigne par $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$ le faisceau des opérateurs différentiels sur $\mathbf{X}$, dont les sections globales sont $\mathcal{D}(\mathbf{X}) = \Gamma(\mathbf{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{X}})$. Rappelons que lorsque $\mathbf{X}$ est affine et lisse, la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$-modules quasi-cohérents est équivalente à celle des $\mathcal{D}(\mathbf{X})$-modules (cf. [3] pour ces notions) ; en outre, dans ce cas, $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ est la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par $\mathcal{O}(\mathbf{X})$ et le module $\operatorname{Der}\mathcal{O}(\mathbf{X})$ des dérivations $\mathbb{C}$-linéaires.

Exemple. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n < \infty$; on désigne par $S(V^*)$ l'algèbre symétrique du dual de V. Alors $\mathcal{O}(V) = S(V^*) = \bigoplus_{d\in\mathbb{N}} S^d(V^*)$ est une algèbre graduée, dont l'idéal d'augmentation est noté $S_+(V^*) = \bigoplus_{d>0} S^d(V^*)$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V et $x_i = e_i^* \in V^*$, on a $S(V^*) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ et $S_+(V^*) = (x_1, \ldots, x_n)$. De plus, $S(V)$ s'identifie (via $e_i \mapsto \partial(e_i) = \partial_{x_i}$) à l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients constants sur V ; l'opérateur correspondant à p est alors noté $\partial(p)$. L'algèbre $\mathcal{D}(V) = S(V^*) \otimes S(V)$ n'est autre que l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \partial_{x_i}, \ldots, \partial_{x_n}]$.

Soit L un groupe algébrique réductif et supposons que la variété affine $\mathbf{X}$ est une L-variété. Le quotient (catégorique) $\mathbf{X}/\!\!/L$ est la variété affine ayant pour anneau de fonctions régulières $\mathcal{O}(\mathbf{X}/\!\!/L) = \mathcal{O}(\mathbf{X})^L$ (l'algèbre des invariants). Il existe un morphisme d'algèbres de Lie

$$\tau : \mathfrak{l} = \operatorname{Lie}(L) \longrightarrow \operatorname{Der}\mathcal{O}(\mathbf{X}), \quad \tau(v).f = \left\{x \mapsto \tfrac{d}{dt} f(\mathrm{e}^{-tv}.x)_{|t=0}\right\},$$

et l'on a $\tau(v).f = 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}(\mathbf{X})^L$. Le groupe L opère alors rationnellement dans l'algèbre $\mathcal{D}(\mathbf{X})$ par $(g.d)(f) = g.d(g^{-1}.f)$ pour $g \in L, f \in \mathcal{O}(\mathbf{X})$; il est clair que l'on a un morphisme de restriction[1]

$$\psi : \mathcal{D}(\mathbf{X})^L \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbf{X}/\!\!/L), \quad \psi(D)(f) = D(f),$$

tel que $(\mathcal{D}(\mathbf{X})\tau(\mathfrak{l}))^L \subset \operatorname{Ker}(\psi)$. Observons de plus que $d \in (\mathcal{D}(\mathbf{X})\tau(\mathfrak{l}))^L$ implique $[\tau(\mathfrak{l}), d] = 0$ (avec équivalence lorsque L est connexe) ; il en résulte que $(\mathcal{D}(\mathbf{X})\tau(\mathfrak{l}))^L$

[1]Afin de ne pas multiplier les notations, dans tout ce qui suit ψ désignera une application de restriction à une algèbre d'invariants.

est un idéal bilatère de $\mathcal{D}(\mathbf{X})^L$ et l'on a un morphisme surjectif d'algèbres

$$A(\mathbf{X}) = \mathcal{D}(\mathbf{X})^L \big/ (\mathcal{D}(\mathbf{X})\tau(\mathfrak{l}))^L \twoheadrightarrow R(\mathbf{X}) = \mathcal{D}(\mathbf{X})^L \big/ \operatorname{Ker}(\psi).$$

Soient $\mathfrak{g}_0$ une algèbre de Lie semi-simple réelle, σ_0 une involution de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{q}_0$ la décomposition relativement à σ_0. Les complexifications de ces données sont notées

$$\sigma = (\sigma_0)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{k} = (\mathfrak{h}_0)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{p} = (\mathfrak{q}_0)_{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Nous dirons que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ sont des *paires symétriques*, et que l'on est dans le cas *groupe*, ou *diagonal*, si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est obtenue de la manière suivante : $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \times \mathfrak{s}$, avec $\mathfrak{s}$ algèbre de Lie semi-simple et $\sigma((x, y)) = (y, x)$ (donc $\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{s}$ opère sur $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{s}$ via l'action adjointe).

On fixe des groupes algébriques connexes $K \subset G$ tels que $\operatorname{Lie}(K) = \mathfrak{k}$, $\operatorname{Lie}(G) = \mathfrak{g}$. Le groupe K opère sur $\mathfrak{p}$ par l'action adjointe ; avec les notations des paragraphes précédents, on a donc : $\mathcal{O}(\mathfrak{p}) = S(\mathfrak{p}^*)$, $\tau : \mathfrak{k} \to \operatorname{Der} \mathcal{O}(\mathfrak{p})$, et des morphismes d'algèbres

$$A(\mathfrak{p}) = \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K \big/ (\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}))^K \twoheadrightarrow R(\mathfrak{p}) = \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K \big/ \operatorname{Ker}(\psi) \xhookrightarrow{\psi} \mathcal{D}(\mathfrak{p}/\!\!/K). \tag{1.1}$$

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace de Cartan. On désigne par Σ le système de racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, $W = N_K(\mathfrak{a})/Z_K(\mathfrak{a})$ le groupe de Weyl associé et l'on choisit un sous-ensemble de racines positives $\Sigma^+ \subset \Sigma$. On pose

$$n = \dim \mathfrak{p}, \qquad \ell = \dim \mathfrak{a}.$$

Rappelons que le théorème de Chevalley fournit des isomorphismes

$$\phi : \mathcal{O}(\mathfrak{p}/\!\!/K) = S(\mathfrak{p}^*)^K \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a}^*)^W = \mathcal{O}(\mathfrak{a}/W), \quad \phi : S(\mathfrak{p})^K \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a})^W, \tag{1.2}$$

et que ces algèbres sont des algèbres de polynômes en ℓ variables. L'isomorphisme ϕ est induit par la restriction à $\mathfrak{a}$ des fonctions sur $\mathfrak{p}$ et donne l'isomorphisme de variétés

$$\mathbb{C}^\ell \cong \mathfrak{a}/W \xrightarrow{\sim} \mathfrak{p}/\!\!/K \cong \mathbb{C}^\ell.$$

Cet isomorphisme associe à chaque orbite $W.a \in \mathfrak{a}/W$ l'orbite fermée $K.a \in \mathfrak{p}/\!\!/K$.

Si $\lambda \in \mathfrak{p}^*$, on note I_λ l'idéal maximal de $S(\mathfrak{p})^K$ associé au caractère λ de $S(\mathfrak{p})$ défini par $f \mapsto f(\lambda)$; on notera également I_λ l'idéal $\phi(I_\lambda) \subset S(\mathfrak{a})^W$. On observera que I_λ ne dépend que de l'unique orbite fermée $K.\xi$, $\xi \in \mathfrak{a}^*$, contenue dans $\overline{K.\lambda} \subset \mathfrak{p}^*$. Donc, pour tout opérateur à coefficients constants $\partial(f)$ dans $S(\mathfrak{p})^K$ ou $S(\mathfrak{a})^W$, le scalaire $f(\lambda) = f(\xi)$ est bien défini. L'idéal d'augmentation $S_+(\mathfrak{p}^*)^K$ ou $S_+(\mathfrak{a}^*)^W = \phi(S_+(\mathfrak{p}^*)^K)$ est noté J_0 dans les deux cas. On rappelle que

$$\mathbf{N}(\mathfrak{p}) = \{x \in \mathfrak{p} : f(x) = 0 \ \text{pour tout} \ f \in J_0\}$$

est le cône des éléments nilpotents de $\mathfrak{p}$.

Distributions sphériques. Pour tout $\alpha \in \Sigma$ on pose $m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha$; l'élément $\pi = \prod_{\alpha\in\Sigma^+} \alpha^{m_\alpha}$ vérifie $\pi^2 \in S(\mathfrak{a}^*)^W$ et $\zeta = \phi^{-1}(\pi^2)$ est le discriminant de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, de sorte que

$$\mathfrak{p}' = \{x \in \mathfrak{p} : \zeta(x) \neq 0\}$$

est l'ouvert (dense) des éléments réguliers semi-simples de $\mathfrak{g}$. Si $E \subset \mathfrak{p}$ est un sous-ensemble, on pose $E' = E \cap \mathfrak{p}'$. Soit $U \subset \mathfrak{q}_0$ un ouvert. On désigne par $\mathsf{Db}(U)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des distributions sur U. Rappelons que $\mathsf{Db}(U)$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}(\mathfrak{p})$-module. Dans cet exposé une distribution $T \in \mathsf{Db}(U)$ sera dite

- *singulière* si son support, $\mathrm{Supp}(T)$, est contenu dans $U \smallsetminus U'$;
- $\mathfrak{k}$-*invariante*, ou simplement invariante, si $\tau(\mathfrak{k}).T = 0$;
- *propre* (de caractère λ) s'il existe $\lambda \in \mathfrak{p}^*$ tel que $I_\lambda.T = 0$, i.e. $\partial(f).T = f(\lambda)T$ pour tout $f \in S(\mathfrak{p})^K$;
- *nilpotente* si $\mathrm{Supp}(T) \subset U \cap \mathbf{N}(\mathfrak{p})$;
- *sphérique* (ou λ-sphérique) si T est $\mathfrak{k}$-invariante et propre (de caractère λ).

Remarquons que la condition T singulière, resp. nilpotente, se traduit (localement) par : pour tout $x_0 \in U$, il existe un ouvert $\Omega \subset U$ contenant x_0 et un $t \in \mathbb{N}$ tels que $\zeta^t T_{|\Omega} = 0$, resp. $J_0^t T_{|\Omega} = 0$.

Nous voulons étudier les distributions sphériques sous l'angle des D-modules K-équivariants sur $\mathfrak{p}$. Cette approche initiée dans [13] (cas diagonal) a été reprise pour les paires symétriques quelconques dans, par exemple, [14, 17, 19, 20]. Elle consiste à remarquer que les distributions sphériques sont solutions (distributions) de certains $\mathcal{D}(\mathfrak{p})$-modules que nous allons maintenant introduire. Pour $\lambda \in \mathfrak{p}^*$ et $t \in \mathbb{N}$ on pose

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_\lambda &= \mathcal{D}(\mathfrak{p})/(\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) + \mathcal{D}(\mathfrak{p})I_\lambda),\\
\mathcal{N}'_\lambda &= \mathcal{N}'_{\lambda,t} = \mathcal{D}(\mathfrak{p})/(\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) + \mathcal{D}(\mathfrak{p})I_\lambda + \mathcal{D}(\mathfrak{p})\zeta^t),\\
\mathcal{M}_\lambda &= \mathcal{M}_{\lambda,t} = \mathcal{D}(\mathfrak{p})/(\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}) + \mathcal{D}(\mathfrak{p})I_\lambda + \mathcal{D}(\mathfrak{p})J_0^t).
\end{aligned} \tag{1.3}$$

On a donc des morphismes surjectifs $\mathcal{N}_\lambda \twoheadrightarrow \mathcal{N}'_\lambda \twoheadrightarrow \mathcal{M}_\lambda$.

Soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}(\mathfrak{p}).T \subset \mathsf{Db}(U)$ le D-module engendré par la distribution T. Il est clair que (avec les notations précédentes) :

- si T est sphérique, il existe un morphisme surjectif $\mathcal{N}_\lambda \twoheadrightarrow \mathcal{M}$;
- si T est sphérique singulière, il existe un morphisme surjectif $\mathcal{N}'_{\lambda|\Omega} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{|\Omega}$;
- si T est sphérique nilpotente, il existe un morphisme surjectif $\mathcal{M}_{\lambda|\Omega} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{|\Omega}$.

On déduit des remarques ci-dessus que la nullité du module $\mathcal{N}'_\lambda$, resp. $\mathcal{M}_\lambda$, entraîne que tout distribution sphérique singulière, resp. nilpotente, est nulle. En toute généralité nous avons les résultats suivants. Le premier est élémentaire :

Proposition 1.1 ([17]). *Les D-modules $\mathcal{N}_\lambda$, $\mathcal{N}'_\lambda$ et $\mathcal{M}_\lambda$ sont holonomes.*

Rappelons qu'un D-module $\mathcal{M}$ est dit holonome si sa variété caractéristique, $\mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \subset T^*\mathfrak{p} \cong \mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$, est de dimension inférieure ou égale[2] à $n = \dim \mathfrak{p}$. La

[2] On sait que $\dim \mathrm{Ch}(\mathcal{M}) \geq n$ si $\mathcal{M} \neq 0$.

proposition résulte facilement du fait que $\mathrm{Ch}(\mathcal{N}_\lambda)$ est contenue dans $\{(x,y) \in \mathfrak{p} \times \mathbf{N}(\mathfrak{p}) : [x,y] = 0\}$, et que cette dernière variété est de dimension au plus n.

Le théorème qui suit a été démontré dans [13] dans le cas groupe, conjecturé dans [20] pour le cas général et établi Y. Laurent dans [14].

Théorème 1.2 ([14]). *Le D-module $\mathcal{N}_\lambda$ est régulier. En particulier, toute solution hyperfonction de $\mathcal{N}_\lambda$ est une distribution.*

Dans un certain nombre de cas un argument du type « méthode de descente » (i.e. le passage de $\mathfrak{g}$ au centralisateur $\mathfrak{g}^a$ d'un élément semi-simple $a \in \mathfrak{p}$) permet de ramener la nullité de $\mathcal{N}'_\lambda$ à celle de $\mathcal{M}_\lambda$. C'est le cas pour les "paires symétriques de Sekiguchi", c'est à dire les paires $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ telles que

$$\forall\, \alpha \in \Sigma^+, \quad \dim \mathfrak{g}^\alpha + \dim \mathfrak{g}^{2\alpha} \leq 2. \tag{$\dagger$}$$

Pour $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ irréductible, il y a onze paires vérifiant cette condition :

- **(O)** $(\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}, \mathfrak{s})$, $\mathfrak{s}$ algèbre de Lie simple (le cas diagonal)
- **(I)** $(\mathfrak{sl}(m,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(m,\mathbb{C}))$
- **(II)** $(\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(m,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(m,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$
- **(III)** $(\mathfrak{sp}(m,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(m,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C})$
- **(IV)** $(\mathfrak{so}(2m+k,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(m+k,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{so}(m,\mathbb{C}))$, $k = 0,1,2$
- **(V)** $(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C}))$
- **(VI)** $(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sl}(6,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$
- **(VII)** $(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{sl}(8,\mathbb{C}))$
- **(VIII)** $(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16,\mathbb{C}))$
- **(IX)** $(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{sp}(3,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$
- **(X)** $(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$

J. Sekiguchi a montré dans [20] que si $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ est telle que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ satisfait la condition ($\dagger$) il n'existe pas de distribution sphérique singulière sur $\mathfrak{q}_0$. Ceci est également conséquence du théorème suivant :

Théorème 1.3 ([17]). *Soit $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ une paire symétrique de Sekiguchi, alors $\mathcal{N}'_\lambda = (0)$.*

La preuve du Théorème 1.3 repose sur l'idée générale suivante. Soit $\mathcal{M} = \mathcal{D}(\mathfrak{p}).T$ un D-module tel que $\tau(\mathfrak{k}).T = 0$, e.g. engendré par une distribution $\mathfrak{k}$-invariante T. L'espace

$$\mathcal{M}^{\mathfrak{k}} = \{v \in M : \tau(\mathfrak{k}).v = 0\} \tag{1.4}$$

des points fixes sous l'action de $\mathfrak{k}$ est alors un $\mathcal{D}(\mathfrak{p})^K$-module engendré par T et ce générateur vérifie $(\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k}))^K.T = 0$. Donc $\mathcal{M}^{\mathfrak{k}}$ est un $A(\mathfrak{p})$-module qui est non nul lorsque $\mathcal{M}$ l'est (cf. (1.1) pour les propriétés de $A(\mathfrak{p})$). Le Théorème 1.3 se déduit alors du résultat qui suit ; ce dernier montre que, si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ est une paire symétrique de Sekiguchi, l'algèbre $A(\mathfrak{p})$ possède des propriétés similaires à celle de l'algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{C})$, et en particulier qu'une « inégalité de Bernstein » est vraie pour les $A(\mathfrak{p})$-modules[3].

---

[3]On pourra consulter [18] pour la définition et les principales propriétés de la dimension de Gelfand-Kirillov.

Théorème 1.4 ([17]). *Soit* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ *une paire symétrique de Sekiguchi. Alors,* $A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p})$ *et tout* $A(\mathfrak{p})$*-module non nul* M *vérifie* $\mathrm{GKdim}\, M \geq \ell$*, où* GKdim *désigne la dimension de Gelfand-Kirillov.*

Si l'on prend par exemple $\mathcal{M} = \mathcal{N}'_\lambda$, il n'est pas difficile de voir que $\mathrm{GKdim}\, {\mathcal{N}'_\lambda}^{\mathfrak{k}}$ est inférieur ou égal à la dimension de la variété $\{W.x \in \mathfrak{a}/W : \pi^2(x) = 0\}$. Puisque $\mathfrak{a}/W \cong \mathbb{C}^\ell$ et que π^2 est une fonction non nulle sur $\mathfrak{a}/W$, la dimension de cette variété est $\ell - 1$, d'où $\mathrm{GKdim}\, {\mathcal{N}'_\lambda}^{\mathfrak{k}} \leq \ell - 1$, puis ${\mathcal{N}'_\lambda}^{\mathfrak{k}} = 0$ et $\mathcal{N}'_\lambda = 0$.

Remarque. Comme nous l'avons mentionné précédemment, pour démontrer le Théorème 1.4 il faut commencer par établir la nullité des modules $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda,t}$.

Si $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0)$ est une paire symétrique quelconque il peut exister des distributions sphériques singulières, cf. [20, 23]. Pour essayer de comprendre ce phénomène on peut reprendre la technique utilisée pour les paires de Sekiguchi et étudier les propriétés des $A(\mathfrak{p})$-modules. Il apparaît plus facile de travailler avec les invariants sous l'action du groupe fini W opèrant sur $\mathfrak{a}$, plutôt qu'avec le groupe K agissant sur $\mathfrak{p}$. Ce passage s'effectue à travers l'application de "composante radiale" que nous allons étudier dans la section qui suit.

2. Composantes radiales – Algèbre de Cherednik rationnelle

Composantes radiales. Par le § 1, il existe un morphisme $\psi : \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K \to \mathcal{D}(\mathfrak{p}/\!\!/K)$ (de restriction) et l'isomorphisme de Chevalley $\phi : S(\mathfrak{p}^*)^K \xrightarrow{\sim} S(\mathfrak{a}^*)^W$ fournit un isomorphisme de variétés $\mathfrak{p}/\!\!/K \cong \mathfrak{a}/W$. En composant ψ avec ϕ on obtient le morphisme de composante radiale

$$\mathrm{rad} : \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K \longrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W) \cong A_\ell(\mathbb{C}).$$

Explicitement, rad est défini par

$$\forall\, d \in \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K,\ f \in S(\mathfrak{a}^*)^W, \quad \mathrm{rad}(d)(f) = \phi(d(\phi^{-1}(f))).$$

Il résulte de la définition que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{rad}) = \mathrm{Ker}(\psi) = \{d \in \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K : d(f) = 0 \text{ pour tout } f \in S(\mathfrak{p}^*)^K\}.$$

On pose

$$R = \mathrm{Im}(\mathrm{rad}) \subset \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W).$$

On a ainsi $\mathrm{rad} : R(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R$ et il vient :

$$\mathrm{rad} : A(\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow R(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R \hookrightarrow \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W). \tag{2.1}$$

Dans les « bons cas », e.g. les paires de Sekiguchi, l'algèbre R possède des propriétés similaires à celles de $\mathcal{D}(\mathfrak{a}/W) \cong A_\ell(\mathbb{C})$: elle est simple, la dimension de Gelfand-Kirillov des R-modules vérifie une inégalité de Bersntein, etc.

À titre d'exemple, rappelons la situation dans le cas diagonal. Ici $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{s}$ et en utilisant l'homomorphisme de Harish-Chandra $\delta = \pi \circ \mathrm{rad} \circ \pi^{-1} : \mathcal{D}(\mathfrak{s})^S \to \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W)$, on peut démontrer [15, 16] que

$$R \cong \mathcal{D}(\mathfrak{a})^W, \quad \mathrm{Ker}(\delta) = \mathrm{Ker}(\mathrm{rad}) = (\mathcal{D}(\mathfrak{s})\tau(\mathfrak{s}))^S,$$

où l'on a noté S le groupe adjoint de $\mathfrak{s}$. Comme $\mathcal{D}(\mathfrak{a}) \cong A_\ell(\mathbb{C})$ est une algèbre simple, R est Morita équivalente à $\mathcal{D}(\mathfrak{a}) \rtimes \mathbb{C}W$ (cf. [18, §7.8]) et par conséquent possède toutes les bonnes propriétés voulues.

Dans le cas général deux questions se posent naturellement :

`Problème 1` : Déterminer les paires symétriques pour lesquelles $A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p})$.

`Problème 2` : Calculer, et étudier, l'algèbre R des composantes radiales.

Nous avons vu au Théorème 1.4 que pour les paires de Sekiguchi le Problème 1 est résolu positivement. Pour le moment, le Problème 2 ne possède (à notre connaissance) de réponse que dans le cas diagonal, grâce au morphisme de Harish-Chandra, et dans le cas du rang un, cf. § 3. Néanmoins, le calcul des composantes radiales des éléments de $S(\mathfrak{p})^K$ est toujours possible à l'aide des opérateurs de Dunkl rationnels dont nous allons maintenant rappeler la définition [7, 12].

Opérateurs de Dunkl. Soit $\Delta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha \notin 2\Sigma\}$ l'ensemble des racines indivisibles de Σ et $\Delta^+ = \Sigma^+ \cap \Delta$; la réflexion associée à $\alpha \in \Delta$ est notée s_α. Fixons une fonction de multiplicité $k : \Delta \to \mathbb{C}$, $\alpha \mapsto k_\alpha$, i.e. telle que $k_{w(\alpha)} = k_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$. Nous serons particulièrement intéressé par la *multiplicité radicielle* :

$$c_\alpha = \frac{1}{2}\big(\dim \mathfrak{g}^\alpha + \dim \mathfrak{g}^{2\alpha}\big), \quad \alpha \in \Delta. \tag{2.2}$$

On munit l'algèbre $\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ de l'action par conjugaison (ou action adjointe) du groupe W, que l'on note $d \mapsto w.d = wdw^{-1}$ pour tous $d \in \operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ et $w \in W$; l'algèbre $\mathbb{C}W$ du groupe W s'identifie ainsi à une sous-algèbre de $\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ Il existe un morphisme de restriction de l'algèbre des invariants sous l'action adjointe, notée $(\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*))^W$, vers $\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)^W$; ce morphisme sera (encore) désigné par ψ.

Pour tout $y \in \mathfrak{a}$ on définit un élément $T(y) \in \operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ par la formule

$$T(y) = \partial(y) + \sum_{\alpha \in \Delta^+} k_\alpha \frac{\alpha(y)}{\alpha}(1 - s_\alpha).$$

Notons

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(k) = \mathbb{C}\langle T(y) : y \in \mathfrak{a}\rangle$$

la sous-algèbre de $\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ engendrée par les opérateurs $T(y)$. On démontre alors le résultat suivant (cf. [7, 8, 12] par exemple) :

Proposition 2.1. (1) *L'application $T : y \mapsto T(y)$ définit un isomorphisme d'algèbres graduées de $S(\mathfrak{a})$ sur $\mathcal{S}$.*
(2) *Pour tous $p \in S(\mathfrak{a}), w \in W$, on a $w.T(p) = T(w.p)$.*

L'élément $T(p)$, $p \in S(\mathfrak{a})$, est appelé l'*opérateur de Dunkl* défini par p.

Définition. L'*algèbre de Cherednik rationnelle* associée à ces données est la sous-algèbre $\mathcal{H} = \mathcal{H}(k)$ de $\operatorname{End} S(\mathfrak{a}^*)$ engendrée par W, $S(\mathfrak{a}^*)$ et $\mathcal{S}$.

L'étude de $\mathcal{H}$ est grandement facilitée par le fait qu'elle satisfait à un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, cf. [6, 10] :

Théorème 2.2. *Il existe une filtration de $\mathcal{H}$ (par des sous-espaces vectoriels de dimension finie) pour laquelle*

$$\operatorname{gr} \mathcal{H} \cong (S(\mathfrak{a}^*) \otimes S(\mathfrak{a})) \rtimes \mathbb{C}W$$

comme algèbre. En particulier, $\mathcal{H}$ est noethérienne.

Notons que :
- $\mathcal{H}$ est stable sous l'action par conjugaison de W ;
- puisque $\mathbb{C}W \subset \mathcal{H}$, tout $\mathcal{H}$-module hérite d'une structure de W-module.

Soit M un $\mathcal{H}$-module, l'action de $w \in W \subset \mathcal{H}$ sur $x \in M$ est notée wx et l'espace des W-invariants est désigné par M^W. Observons que $\mathcal{H}$ possède ainsi deux structures de W-module : l'une est donnée par la conjugaison et l'autre par la multiplication à gauche (venant de la structure de $\mathcal{H}$-module à gauche de $\mathcal{H}$). Ces actions ne coïncident évidemment pas. Contrairement à ce qui a été dit cidessus, *nous noterons $\mathcal{H}^W$ l'algèbre des invariants pour l'action adjointe de W*, donc $\mathcal{H}^W = \{a \in \mathcal{H} : w.a = waw^{-1} = a \text{ pour tout } w \in W\}$. Remarquons que le Théorème 2.2 implique que $\mathcal{H}$ est un module de type fini (à droite et à gauche) sur l'anneau noethérien $\mathcal{H}^W$.

Soit
$$\mathsf{e} = \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} w \in \mathbb{C}W \subset \mathcal{H}$$
l'idempotent associé à la représentation triviale de W. On a $\mathsf{e} \in \mathcal{H}^W$, $g\mathsf{e} = \mathsf{e}g = \mathsf{e}$ pour tout $g \in W$ et
$$\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e} = \mathsf{e}\mathcal{H}^W.$$
Les opérations de $\mathcal{H}$ induisent sur $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ une structure d'algèbre dont l'élément unité est e. En outre,
$$\mathcal{H} = \mathsf{e}\mathcal{H} \oplus (1-\mathsf{e})\mathcal{H}, \quad \mathcal{H}^W = \mathsf{e}\mathcal{H}^W \oplus (1-\mathsf{e})\mathcal{H}^W.$$

Définition. L'algèbre $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e} = \mathsf{e}\mathcal{H}^W$ est appelée la *sous-algèbre sphérique* de $\mathcal{H}$.

La sous-algèbre sphérique contient les deux sous-algèbres $\mathsf{e}S(\mathfrak{a}^*)^W$ et $\mathsf{e}\mathcal{S}^W$ qui sont, respectivement, isomorphes à $S(\mathfrak{a}^*)^W$ et $\mathcal{S}^W$ (par $\mathsf{e}v \mapsto v$, cf. Théorème 2.2). Remarquons que lorsque $k = 0$, on a $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e} = \mathcal{D}(\mathfrak{a})^W$. En général l'algèbre $\mathcal{H}$ n'est pas contenue dans $\mathcal{D}(\mathfrak{a})$: c'est une sous-algèbre du produit croisé $\mathcal{D}(\mathfrak{a}') \rtimes \mathbb{C}W$, où $\mathfrak{a}' = \{x \in \mathfrak{a} : \pi(x) \neq 0\}$ est l'ensemble des éléments réguliers. Par contre, la restriction, $d \mapsto \psi(d)$, des éléments de $\mathcal{H}^W$ à $S(\mathfrak{a})^W$ fournit des opérateurs différentiels qui permettent de calculer les composantes radiales des éléments de $S(\mathfrak{p})^K$ lorsque $k = c$ est la multiplicité radicielle (cf. (2.2)) :

Proposition 2.3. (1) *Soit $d \in \mathcal{H}^W$, alors $\psi(d) \in \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W)$. De plus,* $\operatorname{Ker}(\psi_{|\mathcal{H}^W}) = (1-\mathsf{e})\mathcal{H}^W$ *et ψ induit donc un isomorphisme de $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ sur $\mathcal{R} = \psi(\mathcal{H}^W)$.*
(2) *Si $k = c$, on a* $\operatorname{rad}(\partial(p)) = \psi(T(\phi(p)))$ *pour tout $p \in S(\mathfrak{p})^K$.*

Les assertions qui suivent ne sont pas difficiles à démontrer. Les trois premières sont valides dans un cadre plus général, celui d'une $\mathbb{C}$-algèbre noethérienne A contenant l'algèbre d'un groupe fini W. On rappelle que l'on a noté J_0 l'idéal d'augmentation de $S(\mathfrak{a}^*)^W$. Si $\xi \in \mathfrak{a}^*$ et I_ξ est l'idéal maximal de $S(\mathfrak{a})^W$ associé à $W.\xi$ (cf. § 1), on désigne encore par I_ξ l'idéal qui lui correspond dans l'isomorphisme $v \mapsto T(v)$ de $S(\mathfrak{a})^W$ sur $\mathcal{S}^W$.

A-1. Soit M un $\mathcal{H}$-module, alors $M^W = \mathsf{e}M$, et M^W est de type fini si, et seulement si, M l'est. Inversement, si N est un $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$-module (de type fini) $T(N) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{H}^W} N$ est un $\mathcal{H}$-module (de type fini) tel que $T(N)^W = N$.

A-2. Si l'on désigne par $\mathrm{Irr}(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de A-modules sinples sur un anneau A, il existe une correspondance bijective :

$$\beta : \big\{[L] \in \mathrm{Irr}(\mathcal{H}) : L^W \neq 0\big\} \longrightarrow \mathrm{Irr}(\mathsf{e}\mathcal{H}^W).$$

L'application β est définie par $\beta([L]) = [L^W]$ et $\beta^{-1}([N])$ est la classe d'isomorphisme d'un quotient simple (quelconque) de $T(N)$. En outre, β est bijective sur les classes d'isomorphisme de modules simples de dimension finie.

A-3. Si $\mathcal{H}$ est une algèbre simple, $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$ est simple et Morita équivalente[4] à $\mathcal{H}$.

A-4. Alors, pour tous $s, t \in \mathbb{N}$, les modules

$$\mathcal{H}/\big(\mathcal{H}I_\xi^s + \mathcal{H}J_0^t\big), \quad \mathcal{H}^W/\big(\mathcal{H}^W I_\xi^s + \mathcal{H}^W J_0^t\big), \quad \mathsf{e}\mathcal{H}^W/\big(\mathsf{e}\mathcal{H}^W I_\xi^s + \mathsf{e}\mathcal{H}^W J_0^t\big)$$

sont de dimension finie[5].

On sait [15] que l'algèbre $\mathcal{D}(\mathfrak{a})^W$ est engendrée par les deux sous-algèbres $S(\mathfrak{a}^*)^W$ et $S(\mathfrak{a})^W$. Plus généralement on a, cf. [10, Proposition 4.9] et [2, Theorem 4.6] :

Théorème 2.4. *Si Δ ne possède aucun facteur de type E ou F_4, ou si $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ est simple, alors $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ est engendrée par $\mathsf{e}S(\mathfrak{a}^*)^W$ et $\mathsf{e}\mathcal{S}^W$.*

On pose

$$\mathcal{R}' = \mathbb{C}\langle \mathsf{e}S(\mathfrak{a}^*)^W, \mathsf{e}\mathcal{S}^W\rangle \subset \mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}, \qquad R' = \psi(\mathcal{R}') \subset \mathcal{R} = \psi(\mathcal{H}^W) = \psi(\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}).$$

Conjecture 2.5. On a $\mathcal{R}' = \mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ pour Δ et k quelconques.

De la Proposition 2.3 et du Théorème 2.4 il découle[6] :

Corollaire 2.6. *L'application de restriction ψ donne un isomorphisme $\mathcal{R}' \xrightarrow{\sim} R'$; lorsque $k = c$ est la multiplicité radicielle, on a $R' \subset R \cap \mathcal{R}$.*
Si Δ ne possède aucun facteur de type E ou F_4, ou si $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ est simple, alors $R' = \mathcal{R}$, et donc $\mathcal{R} \subset R$ lorsque $k = c$.

Question. Si $k = c$ est la multiplicité radicielle, dans quels cas a-t-on $R = \mathcal{R}$?

Représentations de dimension finie de la sous-algèbre sphérique. Pour tout $\chi \in \mathrm{Irr}(W) = \mathrm{Irr}(\mathbb{C}W)$, on note V_χ un W-module simple dans la classe de χ. Soit $\mathcal{S}_+ \cong S_+(\mathfrak{a})$ l'idéal d'augmentation de $\mathcal{S}$ (cf. Proposition 2.1). On munit V_χ d'une struture de $\mathcal{S} \rtimes \mathbb{C}W$-module en posant $\mathcal{S}_+.V_\chi = 0$ et on considère le $\mathcal{H}$-module

$$M(\chi) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{S} \rtimes \mathbb{C}W} V_\chi.$$

Alors [5, 8] :

– $M(\chi)$ possède un unique quotient simple que l'on note $L(\chi)$;

[4] Ces propriétés sont vérifiées si l'algèbre de Hecke $\mathbf{H}_W(\mathrm{e}^{2i\pi k})$ du groupe W est semi-simple [2, Theorem 3.1, Corollary 4.2].

[5] En fait, si $\xi \neq 0$ ces modules sont nuls (cf. Proposition 2.7).

[6] On rappelle que R est l'image de l'application rad.

– tout $\mathcal{H}$-module simple de dimension finie (s'il en existe) est isomorphe à un $L(\chi)$;
– si $L(\chi)$ est de dimension finie, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $L(\chi)$ est un quotient de $\mathcal{H}/\big(\mathcal{H}S_+(\mathfrak{a}^*)^t + \mathcal{H}\mathcal{S}_+\big)$.

La classification des $\mathcal{H}$-modules de dimension finie n'est pas achevée ; seuls le rang deux et le type A_ℓ ont été complètement traités, cf. [1, 4, 5, 9]. En ce qui concerne $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$, compte tenu des assertions A-1 à A-4 ci-dessus, on peut démontrer :

Proposition 2.7. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe un $\mathcal{H}$-module simple de dimension finie $L(\chi)$ tel que $L(\chi)^W \neq (0)$;*

(ii) *il existe un $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$-module simple de dimension finie ;*

(iii) *il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\mathsf{e}\mathcal{H}^W/\big(\mathsf{e}\mathcal{H}^W J_0^t + \mathsf{e}\mathcal{H}^W I_0\big) \neq (0)$.*

De plus, si $\xi \in \mathfrak{a}^* \smallsetminus \{0\}$, on a $\mathsf{e}\mathcal{H}^W/\big(\mathsf{e}\mathcal{H}^W J_0^t + \mathsf{e}\mathcal{H}^W I_\xi\big) = (0)$.

Application aux distributions sphériques nilpotentes. On reprend la situation et les notations du § 1 ; on se place de plus dans le cas où $k = c$ est la multiplicité radicielle. Supposons qu'il existe une distribution $T \neq 0$ sur un ouvert de $\mathfrak{q}_0$ telle que T soit λ-sphérique nilpotente. Quitte à restreindre cet ouvert, on peut supposer que le D-module $\mathcal{M} = \mathcal{D}(\mathfrak{p}).T$ est quotient de $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{M}_{\lambda,t}$ pour un $t \in \mathbb{N}$ (cf. (1.3)). On obtient alors le $A(\mathfrak{p})$-module $\mathcal{F} = \mathcal{M}^{\mathfrak{k}} \neq (0)$ (cf. (1.4)) qui est un quotient de $\mathcal{M}_\lambda^{\mathfrak{k}}$. On peut donc tenter d'étudier l'existence de T à travers celle du module non nul $\mathcal{F}$ de la façon suivante.

1. Grâce à la surjection $A(\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow R(\mathfrak{p})$ et l'isomorphisme rad : $R(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\sim} R$ on construit le R-module $\overline{\mathcal{F}} = R \otimes_{A(\mathfrak{p})} \mathcal{F}$, qui est donc isomorphe à un quotient de $\mathcal{F}$. On fait l'hypothèse :

`Hypothèse 1` : Le R-module $\overline{\mathcal{F}}$ est non nul.

Cette hypothèse est trivialement vérifiée si $A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p})$.

2. Puisque R contient $R' = \psi(\mathcal{R}') = \mathbb{C}\langle S(\mathfrak{a}^*)^W, \mathrm{rad}(S(\mathfrak{p})^K)\rangle$ (cf. Proposition 2.3 et Corollaire 2.6), on peut considérer $\overline{\mathcal{F}}$ comme un R'-module (non nul sous l'hypothèse 1). Comme $R' \subset \mathcal{R} \xrightarrow{\sim} \mathsf{e}\mathcal{H}^W$ (ibid.) on obtient ainsi le $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$-module $N = \mathsf{e}\mathcal{H}^W \otimes_{R'} \overline{\mathcal{F}}$. On fait maintenant une deuxième hypothèse :

`Hypothèse 2` : Le $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$-module N est non nul.

Observons que si $\mathcal{R}' = \mathsf{e}\mathcal{H}^W$, l'hypothèse 2 est satisfaite. On a vu (Théorème 2.4) que cette égalité est très souvent vraie et l'on conjecture qu'elle a toujours lieu (Conjecture 2.5).

3. Le fait que $\mathcal{F}$ soit un quotient de $\mathcal{M}_{\lambda,t}$ implique que $N = \mathsf{e}\mathcal{H}^W.\vartheta$ avec $J_0^t.\vartheta = I_0.\vartheta = 0$, on a donc un morphisme surjectif

$$\mathsf{e}\mathcal{H}^W/\big(\mathsf{e}\mathcal{H}^W J_0^t + \mathsf{e}\mathcal{H}^W I_0\big) \twoheadrightarrow N$$

et N est un $\mathsf{e}\mathcal{H}^W$-module de dimension finie, cf. A-4. Moyennant les hypothèses précédentes, la Proposition 2.7 donne :

(a) il existe un $\chi \in \mathrm{Irr}(W)$ tel que $\dim L(\chi) < \infty$ et $L(\chi)^W \neq (0)$;

(b) on a nécessairement[7] $\lambda = 0$.

Cette approche montre que, conjecturalement, l'existence de distributions sphériques nilpotentes doit se refléter dans l'existence de modules de dimension finie sur la sous-algèbre sphérique. Nous allons illustrer ce phénomène dans le cas où $\ell = 1$.

3. Le rang un

Paires symétriques de rang un. Dans cette section on suppose $\ell = 1$. Rappelons qu'il y a quatre types possibles pour les paires symétriques $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ de rang un :

$$(\mathfrak{so}(n+1), \mathfrak{so}(n)),\ n \geq 2; \qquad (\mathfrak{sl}(m+1), \mathfrak{gl}(m)),\ m \geq 2;$$
$$(\mathfrak{sp}(m+1), \mathfrak{sp}(m) \oplus \mathfrak{sp}(1)),\ m \geq 1; \qquad (\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9)).$$

On choisit une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathfrak{p}$, orthonormée (pour la forme de Killing) et telle que $\mathfrak{a} = \mathbb{C}e_1$; la base duale est notée $\{x_1, \dots, x_n\}$, donc $\mathfrak{a}^* = \mathbb{C}x_1$. Dans ce système de coordonnées il vient :

$$S(\mathfrak{p}) = \mathbb{C}[\partial(e_1), \dots, \partial(e_n)] \supset S(\mathfrak{p})^K = \mathbb{C}[e], \quad e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \partial(e_i)^2,$$
$$S(\mathfrak{p}^*) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \supset S(\mathfrak{p}^*)^K = \mathbb{C}[f], \quad f = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Remarquons que $h = [e, f] = -\sum_{i=1}^n x_i \partial(e_i) - \frac{n}{2}$. On pose :

$$x = x_1, \quad \partial = \partial(e_1), \quad \Delta = \{\pm\alpha\}, \quad W = \{1, s = s_\alpha\}.$$

Il vient

$$S(\mathfrak{a}) = \mathbb{C}[\partial] \supset S(\mathfrak{a})^W = \mathbb{C}[\partial^2], \qquad S(\mathfrak{a}^*) = \mathbb{C}[x] \supset S(\mathfrak{a}^*)^W = \mathbb{C}[x^2]$$

et la multiplicité radicielle est alors

$$c = c_\alpha = \frac{1}{2}(n-1).$$

On pose $z = x^2$, de sorte que z est la coordonnée sur $\mathfrak{a}/W$ et que $\mathcal{D}(\mathfrak{a}/W) = \mathbb{C}[z, \partial_z]$. Le calcul des composantes radiales des éléments e, f, h donne :

$$\mathrm{rad}(e) = 2z\partial_z^2 + n\partial_z, \quad \mathrm{rad}(f) = -\frac{1}{2}z, \quad \mathrm{rad}(h) = -2z\partial_z - \frac{n}{2}.$$

En ce qui concerne le morphisme surjectif $A(\mathfrak{p}) \twoheadrightarrow R(\mathfrak{p})$, on a le résultat suivant.

Théorème 3.1 ([17, 19]). *Supposons* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \neq (\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$. *Alors,* $A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p})$.

Remarque. Si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) = (\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$, la question $A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p})$ paraît être ouverte.

[7] Heuristiquement, on peut interpréter cette condition en disant que la “transformée de Fourier” de T est également nilpotente.

Algèbre de Cherednik. Soit $k : \Delta \to \mathbb{C}$ une fonction de multiplicité non nulle ; on pose $k = k_\alpha \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}\langle x, T, s\rangle = \mathbb{C}\langle x, T\rangle, \quad \mathcal{S} = \mathbb{C}[T], \quad T = \partial + \frac{k}{x}(1-s).$$

Notons $\mathfrak{sl}(2) = \mathbb{C}E \oplus \mathbb{C}F \oplus \mathbb{C}H$ avec $[H,E] = 2E$, $[H,F] = -2F$, $[E,F] = H$, et soit $\omega = H^2 + 2H + 4FE$ l'élément de Casimir de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{sl}(2))$. Il n'est pas difficile d'établir le lemme qui suit.

Lemme 3.2. *Soient* $\tilde{e} = \frac{1}{2}T^2$, $\tilde{f} = -\frac{1}{2}x^2$, $\tilde{h} = -x\partial - \frac{1}{2}(2k+1)$.

(1) *On pose* $a = \frac{1}{4}(2k+1)(2k-3)$, $b = \frac{1}{4}(2k-1)(2k+3)$. *Alors, l'application* $E \mapsto \tilde{e}$, $F \mapsto \tilde{f}$, $H \mapsto \tilde{h}$ *induit un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{H}^W = \mathbb{C}\langle \tilde{e}, \tilde{f}, \tilde{h}\rangle \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - a)(\omega - b) \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - a) \times U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - b)$$

avec $\mathsf{e}\mathcal{H}^W \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - a)$, $(1-\mathsf{e})\mathcal{H}^W \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - b)$.

(2) *On a*[8] $\mathsf{e}\mathcal{H}^W = \mathbb{C}\langle \mathsf{e}S(\mathfrak{a}^*)^W, \mathsf{e}\mathcal{S}\rangle = \mathbb{C}\langle \mathsf{e}\tilde{f}, \mathsf{e}\tilde{e}\rangle$ *et l'application de restriction* ψ *fournit*

$$\psi : \mathsf{e}\mathcal{H}^W \xrightarrow{\sim} R' = \mathcal{R} \subset \mathcal{D}(\mathfrak{a}/W)$$

avec $\psi(\mathsf{e}\tilde{e}) = 2z\partial_z^2 + (2k+1)\partial_z$, $\psi(\mathsf{e}\tilde{f}) = -\frac{1}{2}z$, $\psi(\mathsf{e}\tilde{h}) = -2z\partial_z - \frac{1}{2}(2k+1)$.

Les modules de dimension finie sur $\mathcal{H}$ et $\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}$ sont classifiés, cf. par exemple [5] :

Proposition 3.3. *Il existe un* $\mathcal{H}$*-module non nul de dimension finie si, et seulement si,* $k \in \pm\big(\frac{1}{2} + \mathbb{N}\big)$. *On suppose* $k = \frac{1}{2} + s$ *avec* $s \in \mathbb{N}$. *Soit* $\mathsf{sgn} \in \mathrm{Irr}(W)$ *le caractère non trivial. Alors,* $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}) = \{[L(\mathsf{sgn})]\}$ *et* $\dim L(\mathsf{sgn}) = 2k$. *En outre,*

$$L(\mathsf{sgn})^W \neq (0) \iff k = \frac{1}{2} + s \quad \textit{avec } s \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas, $L(\mathsf{sgn})^W$ *est l'unique module simple de dimension* s *sur l'algèbre* $\mathsf{e}\mathcal{H}^W \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - (s+1)(s-1))$.

Prenons maintenant pour k la multiplicité radicielle. On a donc $n = \dim \mathfrak{p} = 2c+1$, i.e. $c = \frac{1}{2} + \frac{n-2}{2}$. Rappelons qu'alors $R' \subset R = \mathrm{Im}(\mathrm{rad})$, cf. Corollaire 2.6. En utilisant les propriétés de $U(\mathfrak{sl}(2))$, et en localisant par rapport aux puissances de $\mathrm{rad}(e)$ et $\mathrm{rad}(f)$, on peut démontrer que $R' = R$. En résumé on obtient donc :

Corollaire 3.4. *Pour* $k = c$, *il vient*

(i) $R' = R = \mathcal{R} \cong \mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e} \cong U(\mathfrak{sl}(2))/(\omega - \frac{n(n-4)}{4})$;

(ii) R *possède un (unique) module simple de dimension finie si, et seulement si,* n *est pair* ≥ 4 *; il est de dimension* $\frac{n-2}{2}$.

Application. On peut utiliser l'approche du § 2 pour étudier les distributions sphériques singulières (qui ici coïncident avec les distributions sphériques nilpotentes). Si l'on se place dans le cas où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \neq (\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$, il résulte du Théorème 3.1 et du Corollaire 3.4 que les hypothèses 1 et 2 du § 2 sont satisfaites. D'où :

Corollaire 3.5. *On suppose* $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}) \neq (\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$. *Soit* $T \in \mathsf{Db}(U)$, U *ouvert de* $\mathfrak{q}_0$, *une distribution* λ*-sphérique singulière. Alors,*

[8] On adopte les notations du § 2.

– $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ *est du type suivant :* $(\mathfrak{so}(n+1),\mathfrak{so}(n))$, *$n$ pair* ≥ 4 *;* $(\mathfrak{sl}(m+1),\mathfrak{gl}(m))$, $m\geq 2$ *;* $(\mathfrak{sp}(m+1),\mathfrak{sp}(m)\oplus\mathfrak{sp}(1))$, $m\geqslant 1$ *;*
– *on a* $\lambda = 0$

Remarque. La condition nécessaire $\lambda = 0$ dans le corollaire ci-dessus est un cas particulier d'un résultat démontré en [22].

4. Questions – commentaires

Les sections précédentes ont fait apparaître quelques problèmes et questions qui nécessitent d'être résolus pour que l'utilisation de la théorie des D-modules soit efficace dans l'étude des distributions sphériques.

Question. Trouver les paires symétriques pour lesquelles

$$\mathcal{D}(\mathfrak{p})^K\big/(\mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{p}))^K = A(\mathfrak{p}) = R(\mathfrak{p}) = \mathcal{D}(\mathfrak{p})^K\big/\operatorname{Ker}(\mathrm{rad}). \tag{4.1}$$

On a vu que (4.1) est vrai pour les paires symétriques de Sekiguchi et dans le cas du rang un lorsque $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})\neq(\mathfrak{f}_4,\mathfrak{so}(9))$. Rappelons que dans le cas groupe, l'égalité dans (4.1) a pour conséquence un résultat important de Harish-Chandra : « Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, un opérateur différentiel invariant sur $\mathfrak{g}$ qui annule les fonctions polynomiales invariantes, annule les distributions invariantes (sur une forme réelle de $\mathfrak{g}$). », cf. [16] pour une discussion de ce cas.

On peut poser une question plus générale : Quand a-t-on

$$\big\{d\in\mathcal{D}(\mathfrak{p}) : d(S(\mathfrak{p}^*)^K) = 0\big\} = \mathcal{D}(\mathfrak{p})\tau(\mathfrak{k})\,? \tag{4.2}$$

En prenant les K-invariants, il est clair que (4.2) implique (4.1). Si $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ est une paire symétrique de Sekiguchi, alors (4.2) est vrai [17]. L'exemple de la paire $(\mathfrak{sl}(3),\mathfrak{gl}(2))$ montre que (4.2) n'est pas toujours vrai [19].

Problèmes. (a) On pose $\mathcal{H}=\mathcal{H}(c)$ où c est la multiplcité radicielle. Une réponse positive à la conjecture suivante renforcerait (si besoin est) l'intérêt de l'étude de la sous-algèbre sphérique.

Conjecture 4.1. On a

$$R = \operatorname{Im}(\mathrm{rad}) = \mathbb{C}\langle S(\mathfrak{a}^*)^W, \mathrm{rad}(S(\mathfrak{p})^K\rangle = \mathcal{R} = \psi(\mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}).$$

(b) L'exemple des paires symétriques de Sekiguchi et du rang un laisse penser que l'existence de distributions sphériques singulières doit produire des R-modules de dimension de Gelfand-Kirillov "petite", i.e. telle que $\mathrm{GKdim} < \ell$. Par conséquent il serait souhaitable de pouvoir déterminer les nombres : $\min\{\mathrm{GKdim}\,N : N\ R\text{-module non nul}\}$ et $\min\{\mathrm{GKdim}\,M : M\ \mathsf{e}\mathcal{H}\mathsf{e}\text{-module non nul}\}$.

(c) S'il existe un R-module simple M de dimension finie que peut-on dire des solutions dans $\mathsf{Db}(\mathfrak{q}_0)$ du D-module

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}(\mathfrak{p})\otimes_{\mathcal{D}(\mathfrak{p})^K} M\,?$$

(d) Dans le cas p-adique le problème de l'existence de distributions sphériques singulières se pose aussi. Ainsi, il est par exemple prouvé dans [11] qu'il existe des distributions invariantes égales à leurs transformées de Fourier et à support dans le cône nilpotent. C'est le cas pour la paire[9] $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h}_0) = (\mathfrak{sl}(3m), \mathfrak{s}(\mathfrak{gl}(2m) \times \mathfrak{gl}(m)))$.

Ceci invite à étudier l'analogue complexe, où l'on pourrait espérer lier ce phénomène à l'existence de modules de dimension finie sur la sous-algèbre sphérique.

Références

[1] Y. Berest, P. Etingof, and V. Ginzburg, Finite-dimensional representations of rational Cherednik algebras, *Internat. Math. Res. Notices*, **19** (2003), 1053-1088.

[2] ______, Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants, *Duke Math. J.*, **118** (2003), 279-337.

[3] A. Borel et al., *Algebraic D-modules*, Academic Press, Boston, 1987.

[4] T. Chmutova, Representations of the rational Cherednik algebras of dihedral type, *Preprint* (2004), ArXiv: math.RT/0405383.

[5] C. Dezélée, Représentations de dimension finie de l'algèbre de Cherednik rationnelle, *Bull. Soc. Math. France*, **131** (2003), 465-482.

[6] ______, Représentations d'algèbres de Cherednik rationnelles et d'algèbres de Hecke graduées généralisées, Thèse de Doctorat, Université de Brest, 2003.

[7] C. F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups , *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311** (1989), 167-183.

[8] C. F. Dunkl and E. Opdam, Dunkl operators for complex reflection groups, *Proc. London Math. Soc.*, **86** (2003), 70-108.

[9] P. Etingof and T. Chmutova, On some representations of the rational Cherednik algebra, *Preprint* (2003), ArXiv: math.RT/0303194.

[10] P. Etingof and V. Ginzburg, Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism, *Invent. Math.*, **147** (2002), 243-348. Références.

[11] Y. Z. Flicker, Orbital integrals on symmetric spaces and spherical characters, *J. Algebra*, **184** (1996), 705-754.

[12] G. J. Heckman, A remark on the Dunkl differential-difference operators, in "Harmonic analysis on reductive groups", Progress in mathematics 101, Birkhäuser, 1991.

[13] R. Hotta and M. Kashiwara, The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, *Invent. Math.*, **75** (1984), 327-358.

[14] Y. Laurent, Regularity of the D-module associated to a symmetric pair, *Preprint* (2003), ArXiv: math.AP/0301296.

[15] T. Levasseur and J. T. Stafford, Invariant Differential Operators and an Homomorphism of Harish-Chandra, *J. Amer. Math. Soc.*, **8** (1995), 365-372.

[16] ______, The kernel of an homomorphism of Harish-Chandra, *Ann. Sci. Éc. Normale Sup.*, **29** (1996), 385-397.

[17] ______, Invariant differential operators on the tangent space of some symmetric spaces, *Ann. Inst. Fourier*, **49** (1999), 1711-1741.

[18] J. C. McConnell and J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian Rings*, Grad. Texts in Math. Vol. 30, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[19] H. Ochiai, Invariant functions on the tangent space of a rank one semisimple symmetric space, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **39** (1992), 17-31.

[20] J. Sekiguchi, Invariant Spherical Hyperfunctions on the Tangent Space of a Symmetric Space, in "Algebraic Groups and Related Topics", Advanced Studies in Pure Mathematics, 6 (1985), 83-126.

[9] Rappelons qu'ici le système de racines Δ est de type B_m et que la classification des $\mathcal{H}$-modules de dimension finie n'est pas terminée pour ce cas.

[21] C. Torossian, Une application des opérateurs de Dunkl au théorème de restriction de Chevalley, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **318** (1994), 895-898.

[22] ———, Un théorème d'unicité pour les distributions sphériques sur l'espace tangent à un espace symétrique, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **72** (1996), 230-231.

[23] ———, Intégrales orbitales et distributions sphériques singulières pour les espaces symétriques de rang 1, *Groupe de recherche « Analyse harmonique invariante »*, exposé du 5 novembre 2004.

Département de Mathématiques, Université de Brest, 29238 Brest cedex 3.
URL: `http://stockage.univ-brest.fr/~levasseu`