

Examen d'Analyse 1

Exercice 1

1/ Trouver les primitives de $x \mapsto \sin^3 x$ sur \mathbb{R} .

2/ Calculer $\int_0^2 t^2 e^t dt$.

Exercice 2

Résoudre $y'' + 5y' - 6y = \cos x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Calculer la différentielle de $(x, y) \mapsto f(x, y) = e^{-x} \sin y + x^5 y^2 \cos x$ en (x_0, y_0) .

Exercice 4

On se propose d'étudier la fonction définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}} dt$, définie sur \mathbb{R} , sans calculer la valeur exacte de l'intégrale.

1/ Étudier et représenter graphiquement la fonction $\phi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}}$.

2/ On suppose $x \geq 0$. Donner une interprétation géométrique de $f(x)$. En déduire $f(-x) = -f(x)$.

3/ Calculer les dérivées des fonctions $x \mapsto \int_0^x \phi(t) dt$, $x \mapsto \int_0^{2x} \phi(t) dt$ et $x \mapsto$

$\int_x^{2x} \phi(t) dt = f(x)$.

4/ Étudier les variations de f .

5/ Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

6/ Montrer que pour tout $x \geq 0$, $0 \leq f(x) \leq \int_x^{2x} 1 dt$. En déduire la position du graphe de f par rapport à la tangente en $(0, f(0))$.

7/ Tracer le graphe de f .