Chapitre 1

Séries numériques

1. Généralités

Dans ce chapitre toutes les suites considérées sont à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les suites peuvent être définies sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}$ privé d'un nombre fini d'éléments.

Définition 1.1

Etant donnée une suite numérique (u_n), on lui associe la suite dite des sommes partielles (S_n) défnie par

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.}$$

On appelle série de terme général (u_n), notée $\sum u_n$, le couple $\big((u_n),(S_n)\big)$.

Dans la définition précédente, bien que la série $\sum u_n$ soit définie par le couple $((u_n),(S_n))$, la connaissance de la suite (u_n) détermine la série $\sum u_n$.

Définition 1.2

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est convergente si la suite des sommes partielles (S_n) est convergente. Sa limite S s'appelle la somme de la série et elle sera notée

$$\boxed{S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.}$$

La suite (R_n) définie par $R_n = S - \sum_{k=0}^{n} u_k$ s'appelle le reste de la série $\sum u_n$. Une série qui n'est pas convergente est dite divergente.

Exemple 1.1

1. La série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. En effet, on a $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to +\infty$.
2. On appelle série géométrique la série dont le terme général est donné par la suite géométrique $u_n = a^n$, avec $a \in \mathbb{K}$ une constante. Cette série est convergente si et seulement si $|a| < 1$ et sa somme vaut $S = \frac{1}{1-a}$.
3. Une série $\sum u_n$ est dite téléscopique s'il existe une suite numérique (a_n) telle que $u_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une telle série est convergente si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ existe. Dans ce cas sa somme vaut $S = a_0 - \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Remarque 1.1

Lorsqu'une série n'est pas définie pour $n = 0, 1, \cdots, p-1$, on écrira $\sum\limits_{n \geqslant p} u_n$ au lieu de $\sum u_n$.

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour la convergence d'une série numérique. Elle est très utile dans la pratique.

Proposition 1.1

Soit $\sum u_n$ une série convergente, alors la suite (u_n) est convergente et

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

De plus, le reste $R_n = S - \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Exemple 1.2

La série de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est pas convergente puisque (u_n) ne converge pas vers 0.

On a aussi le critère de Cauchy qui généralise la proposition précédente :

Théorème 1.1. (Crtitère de Cauchy pour les séries)

Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\boxed{\forall\, p, q \in \mathbb{N},\ q \geqslant p \geqslant n_0 \Longrightarrow \left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leqslant \varepsilon.}$$

Exemple 1.3

Grâce au critère de Cauchy on peut montrer que certaines séries sont divergentes. Par exemple, pour la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ on a

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ce qui implique que cette série est divergente.

Définition 1.3

On dit qu'une série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

En utilisant le critère de Cauchy, on démontre la proposition très importante suivante :

Proposition 1.2

Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus, on a

$$\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.}$$

Remarque 1.2

La réciproque de la proposition précédente est fausse ; il existe des séries convergentes sans être absolument convergentes. Un exemple typique de telles séries est celui de certaines séries alternées qu'on va étudier dans les sections suivantes.

Nous avons la proposition suivante sur les combinaisons linéaires des séries convergentes :

Proposition 1.3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et sa somme vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

2. Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs jouent un rôle important dans l'étude des séries numériques. Commençons par un critère simple concernant la convergence de ces séries.

Proposition 2.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, i.e la suite (u_n) est réelle et $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors cette série est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est majorée.

La proposition précédente a pour conséquence la règle de comparaison suivante, qui est très utilisée dans la pratique :

Proposition 2.2. (comparaison des séries à termes positifs)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier naturel. Alors si la série $\sum v_n$ est convergente, la série $\sum u_n$ l'est aussi, et sa somme vérifie

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.}$$

Si la série $\sum u_n$ est divergente, la série $\sum v_n$ l'est aussi.

On a le corollaire suivant :

Corollaire 2.1

Soit $\sum u_n$ une série numérique et soit $\sum v_n$ une série à termes positifs qui est convergente et telle que $|u_n| \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier naturel. Alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

On peut utiliser aussi les intégrales pour étudier la convergence d'une série à termes positifs. On reviendra sur ce point quand on aura vu les intégrales généralisées.

Pour pouvoir appliquer le critère de comparaison, on a besoin de connaitre les propriétés de certaines séries dites de référence.

Proposition 2.3. (séries de références)

1. La série (dite de Riemann) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$, est convergente si et seulement si $s > 1$.
2. la série géométrique $\sum a^n$ est convergente si et seulement si $|a| < 1$. Dans ce cas elle est absolument convergente.

Exemple 2.1

La série $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ est est absolument convergente par comparaison avec la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ qui est convergente.

Définition 2.1

On dit que deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite numérique (a_n) vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ telle que $u_n = a_n v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$, où n_0 est un entier naturel. Dans ce cas on écrit $u_n \sim v_n$.

Le fait que deux suites soient équivalentes est une relation d'équivalentce sur l'ensemble des suites numériques. En particulier elle est symétrique, i.e si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Dans la pratique pour vérifier si deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, on calcule la limite du rapport $\frac{u_n}{v_n}$ (on suppose ici que $v_n \neq 0$ pour $n \geqslant n_0$). Si cette limite vaut 1 les deux suites sont équivalentes.

Nous avons la proposition suivante concernant deux séries dont les termes généraux sont deux suites équivalentes de même signe :

Proposition 2.4

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors les deux séries sont de même nature.

Il est très important que (u_n) et (v_n) soient à termes positifs dans la proposition précédente ; il existe des exemples de deux séries (changeant de signe) qui sont équivalentes mais l'une converge et l'autre diverge (voir exemple en exercices).

Nous terminons ce paragraphe par deux autres règles classiques de convergence des séries à termes positifs. On les obtient en comparant avec des séries géométriques :

Proposition 2.5. (Règle de Cauchy)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et supposons que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n}$ existe. Alors si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente, et si $l > 1$ la série est divergente. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Proposition 2.6. (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs et supposons que $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe. Alors si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente, et si $l > 1$ la série est divergente. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Remarque 2.1

Les règles de Cauchy et de d'Alembert sont intimement liées. En effet, si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n}$ existent, alors elles sont égales.

3. Séries à termes quelconques, séries alternées

Lorsqu'une série n'est pas absolument convergente on doit trouver un autre moyen pour étudier sa convergence sans connaître sa limite éventuelle. Commençons par le cas d'une famille de séries très connues :

Définition 3.1

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est alternée si elle est réelle et $(-1)^n u_n$ garde un signe constant pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi on a $u_n = (-1)^n |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $u_n = (-1)^{n+1}|u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons la proposition suivante concernant la convergence des séries alternées :

Proposition 3.1

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ soit décroissante et convergente vers 0. Alors la série $\sum u_n$ est convergente et sa somme vérifie

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_{2n} \quad \text{si } u_0 \geqslant 0}$$

et

$$\boxed{\forall\ n \in \mathbb{N},\ S_{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant S_{2n+1} \quad \text{si } u_0 < 0.}$$

où (S_n) est la suite des sommes partielles.

Remarque 3.1

On peut être plus précis dans la proposition précédente : si on considère la suite des sommes partielles S_n, alors on peut vérifier (voir exercices) que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et leur limite commune est la somme de la série alternée.

Exemple 3.1

En appliquant la proposition précédente, on voit que la série alternée $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$, est convergente si et seulement si $s > 0$.

Nous allons maintenant énoncer un théorème plus général que la proposition précédente, il est très utile lorsque les théorèmes sur les séries à termes positifs ne s'appliquent pas.

Théorème 3.1. (Premier critère d'Abel)

Soient (a_n) une suite réelle à termes positifs ou nuls, qui est décroissante et convergente vers 0, et soit (u_n) une suite numérique telle que la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ soit bornée, i.e, il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $|S_n| \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série numérique $\sum a_n u_n$ est convergente.

Exemple 3.2

En utilisant le critère d'Abel précédent on peut vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$, $\theta \in \mathbb{R}$, est convergente si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. En prenant les parties réelle et imaginaire de cette série on voit que les deux séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ sont convergentes si et seulement si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Nous terminons cette section avec le second critère d'Abel :

Théorème 3.2. (Second critère d'Abel)

Soient (u_n) une suite numérique telle que la série $\sum u_k$ soit convergente, et soit (v_n) une suite numérique telle que la série $\sum |v_{n+1} - v_n|$ soit convergente, alors la série numérique $\sum u_n v_n$ est convergente.

4. Exercices

Exercice 4.1

Etudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha \ln n} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}.$$

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \arctan\frac{n}{n^2+1} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$$

Exercice 4.2

Soit u_n une suite décroissante à termes positifs. On suppose $\sum u_n$ convergente. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} (n u_n) = 0.$$

Indication : Encadrer $\sum_{k=p+1}^{n} u_k$ pour $n > p$. Puis revenir aux définitions des limites avec les epsilons.

Exercice 4.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Exercice 4.4

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}$. Donner une valeur approchée de S en garantissant une erreur inférieure ou égale à 10^{-3}.

Exercice 4.5

Justifier la convergence et calculer les sommes des séries suivantes

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+k)} \quad (k\in\mathbb{N}^*), \quad \sum \frac{9}{(3n+1)(3n+4)},$$
$$\sum \frac{n^2+n-3}{n!}, \quad \sum_{n\geqslant 2} \ln \frac{n^2}{n^2-1}.$$

Exercice 4.6

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ donné et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux u_n et $\ln(u_{n+1}/u_n)$ divergent.

Exercice 4.7

Soit $\sum(-1)^n|u_n|$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)$ soit décroissante et convergente vers 0, et soit (S_n) la suite de ses sommes partielles. Montrer que les deux suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et en déduire la convergence de la série $\sum(-1)^n|u_n|$.

Exercice 4.8

Montrer que les deux suites $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ sont équivalentes mais les deux séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ ne sont pas pas de même nature.

Exercice 4.9

Soit (u_n) un e suite numérique telle que $u_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, et soient $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $w_n = \frac{u_n}{1+u_n^2}$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Peut-on dire de même pour les deux séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$?

Exercice 4.10

Soient P et Q deux polynômes de degrés p et q respectivement. Montrer que

1. la série $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ est convergente si et seulement si $p+2 \leqslant q$, où n_0 est un entier assez grand pour que $Q(n) \neq 0\ \forall n \geqslant n_0$.
2. La série $\sum (-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$ est convergente si et seulement si $p+1 \leqslant q$.

Exercice 4.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général u_n diverge.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \ldots + u_n$. Etudier en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $\frac{u_n}{(S_n)^\alpha}$.

Exercice 4.12

Soient, pour $n > 0$, $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ et $v_n = \ln u_n$.

1. Etudier la serie de terme général w_n où, pour $n \geqslant 2$, $w_n = v_n - v_{n-1}$ et $w_1 = v_1$.
2. En déduire, en utilisant la convergence de la suite des sommes partielles de w_n, que la suite u_n converge vers $\lambda > 0$.
3. Déterminer λ en utilisant la formule de Wallis : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!} = \sqrt{\pi}$. En déduire un équivalent de $n!$.

   Indication : Exprimer $n!$ (respectivement $(2n)!$) en fonction de u_n (resp. de u_{2n}) et remplacer-les dans la formule de Wallis.