Chapitre 1

Fonctions holomorphes

La plupart des démonstrations des résultats enoncés dans ce cours sera faite en classe. Certaines d'entre elles seront laissées aux étudiants sous forme d'exercices.

1. Premières définitions et premières propriétés

Définition 1.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable (ou $\mathbb{C}$-différentiable) en un point $a \in U$ si la limite suivante existe :

$$\boxed{\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.}$$

Si c'est le cas, cette limite est appelée dérivée de f en a et on la note $f'(a)$.

Dans la définition précédente, on peut écrire la $\mathbb{C}$-dérivabilté de f en a sous la forme (pour z dans un voisinage de a) :

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + o(z-a). \tag{1}$$

Une conséquence directe de (1) est que f est continue en a. On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.1

Toute fonction $\mathbb{C}$-dérivable en un point est continue en ce point.

Une autre conséquence de la relation (1) ci-dessus est la $\mathbb{R}$-différentiabilité de f en a. En effet, en identifiant $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ via l'isomorphisme : $\mathbb{C} \ni z = x+iy \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on peut considérer f comme une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, et la relation (1) implique que f est $\mathbb{R}$-différentiable en a, de différentielle l'application $df(a) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $df(a)(x,y) = f'(a)(x+iy)$. Une propriété fondamentale de $df(a)$ est qu'elle est également $\mathbb{C}$-linéaire si on la considère comme application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (via l'isomorphisme mentioné ci-dessus). En notant $f'(a) = \alpha + i\beta$, la matrice représentant $df(a)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

En particulier, les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ existent et sont données par $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = df(a)(1,0) = f'(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = df(a)(0,1) = if'(a)$. Remarquons au passage que l'on a dans ce cas, $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Cela nous conduit facilement à la proposition suivante :

Proposition 1.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de U et $f : U \to \mathbb{C}$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est $\mathbb{C}$-dérivable en a.
2. f est $\mathbb{R}$-différentiable en a (en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) et sa différentielle $df(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire (lorsqu'elle est regardée comme apllication de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.)
3. f est $\mathbb{R}$-différentiable en a (en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) et ses dérivées partielles vérifient : $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

En écrivant $f = P + iQ$ avec P et Q des fonctions réelles (partie réelle et partie imaginaire de f) on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1.1

f est $\mathbb{C}$-dérivable en a si et seulement si P et Q sont différentiables en a et vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a) \end{cases}$$

Les équations vérifiées par les fonctions Pet Q dans le corollaire précédent s'appellent équations de Cauchy-Riemann. On peut les reformuler autrement en définissant l'opérateur de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ en posant pour toute fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Ainsi f est $\mathbb{C}$-dérivable en a si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. On définit également l'opérateur de dérivation complexe $\dfrac{\partial}{\partial z}$ en posant pour toute fonction f différentiable sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On peut vérifier que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, alors $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Définition 1.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe (sur U) si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en chaque point de U. Dans ce cas l'application qui à chaque $z \in U$ associe $f'(z)$ s'appelle dérivée de f et elle est notée f'. Une fonction qui est holomorphe sur $\mathbb{C}$ est dite fonction entière.

Exemple 1.1

1. Toute fonction polynômiale $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec comme dérivée (de la même façon que pour la dérivation réelle) $f'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}$. Ainsi toute fonction polynômiale est une fonction entière.

2. Toute fonction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus Z_Q$, où Z_Q désigne l'ensemble des zéros de Q. La dérivée de f est donnée par $f' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.

3. La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \overline{z}$ n'est pas holomorphe (elle n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point du plan complexe). En effet, on a $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1$.

4. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est non constante, alors elle n'est pas holomorphe.

Dans la suite on notera par $\mathcal{H}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. La proposition suivante résume la stabilité de $\mathcal{H}(U)$ vis-à-vis des opérations usuelles du calcul :

Proposition 1.3

1. Lensemble $\mathcal{H}(U)$ muni de l'addition et multiplication usuelles des fonctions est une algèbre sur le corps $\mathbb{C}$. De plus, on a la formule de la dérivée de la somme et le produit de deux fonctions comme dans le cas réel : $(f+g)' = f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$ pour tous $f, g \in \mathcal{H}(U)$.

2. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et ne s'annule pas sur U, alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(U)$ avec $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.

3. Si $f \in \mathcal{H}(U)$ et $g \in \mathcal{H}(V)$ avec $f(U) \subset V$, alors $g \circ f \in \mathcal{H}(U)$ avec $(g \circ f)' = g' \circ f \cdot f'$.

Remarque 1.1

1. D'après le corollaire 1.1 et les définition des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, on a pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(U)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z) = f'(z)$ pour tout $z \in U$.
2. Comme on le verra plus tard, on montrera que si $f \in \mathcal{H}(U)$, alors $f' \in \mathcal{H}(U)$. Il s'agit là d'une propriété fondamentale qui implique en particulier que f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur U et admet donc des dérivées complexes de tout ordre.

La proposition suivante caractérise les fonctions holomorphes de dérivée nulle comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle sur un intervalle :

Proposition 1.4

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors f est constante si et seulement si $f' = 0$ sur U.

Il s'ensuit le corollaire suivant :

Corollaire 1.2

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Si $f(U) \subset \mathbb{R}$, alors f est constante. Plus généralement, si $f(U)$ est inclus dans une droite du plan complexe $\mathbb{C}$, alors f est constante.

Nous terminons cette section avec un théorème très important comme dans le cas réel :

Théorème 1.1. (Théorème d'inversion locale, version holomorphe)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{H}(U)$. Soit $z_0 \in U$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage ouvert $U_0 \subset U$ de z_0 et un voisinage ouvert $V_0 \subset \mathbb{C}$ de $f(z_0)$ tels que la restriction de f à U_0 soit un difféomorphisme biholomorphe de U_0 dans V_0, i.e $f|_{U_0}$ est une bijection de U_0 dans V_0 de fonction réciproque holomorphe sur V_0. De plus on a : $\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$ pour tout $w \in V_0$.

Le thèorème d'inversion locale permet, entre autre, de définir de nouvelles fonctions holomorphes.

2. Séries entières, fonctions analytiques

Soit $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n z^n$ une série entière à coefficients dans $\mathbb{C}$. On rappelle le rayon de convergence d'une telle série :

Proposition 2.1

Il existe un unique $R \in [0, +\infty]$ appelé rayon de convergence de la série entière tel que :

1. La série converge normalement sur tout compact $K \subset D(0,R)$ (ici $D(0,R)$ désigne le disque ouvert de centre 0 et de rayon R). En particulier, la série est convergente pour tout $z \in D(0,R)$.
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série est divergente.

De plus, R est donné par la formule :

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}} ,$$

avec la convention $\dfrac{1}{0} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$. Le disque $D(0,R)$ s'appelle disque de convergence de la série entière.

Remarque 2.1

Dans la pratique pour calculer le rayon de convergence d'une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, on calcule l'une des deux limites $l = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ ou $l = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. En effet, on peut montrer que si l'une des deux limites existe, alors $R = \frac{1}{l}$.

La proposition suivante nous dit que la somme d'une série entière est holomorphe :

Proposition 2.2

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,R)$. De plus la série entière $\sum_{n\geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ a pour rayon de convergence R et sa somme est égale à $f'(z)$, c'est à dire :

$$\boxed{f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \text{ pour tout } z \in D(0,R).}$$

Remarque 2.2

D'après la proposition précédente, si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, alors la fonction f' est également holomorphe sur $D(0,R)$ et sa dérivée f'' est donnée par

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}, \text{ pour tou } z \in D(0,R).$$

On peut ainsi continuer la dérivation pour conclure que f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable. On verra dans le chapitre 2, que les fonctions holomorphes ont également cette propriété.

Exemple 2.1

Considérons la série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$. Son rayon de convergence est $R = 1$. Sa somme est la fonction f donnée par $f(z) = \frac{1}{1-z}$ qui est *a priori* holomorphe sur le disque $D(0,1)$, est en fait définie et holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Les sommes de séries entières font partie de la classe de fonctions localement développables en séries entières :

Définition 2.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est analytique si pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque ouvert $D(z_0, r) \subset U$ avec $r > 0$ et une série entière $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ tels que

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ pour tout } z \in D(z_0, r).}$$

Remarque 2.3

Dans la définition précédente, les coefficients a_n de la série entière sont complètement déterminés par la fonction f. En effet, d'après la remarque 2.2, f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivable et l'on a $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$. $\big($ ici $f^{(n)}$ désigne la dérivée nième au sens complexe de f. $\big)$

Exemple 2.2

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$. Pour tous $z, z_0 \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z - z_0| < |z_0|$, on a

$$f(z) = \frac{1}{z_0 + (z - z_0)} = \frac{1}{z_0} \times \frac{1}{1 + \frac{(z-z_0)}{z_0}} = \sum_{n+0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} (z - z_0)^n \ ,$$

   ce qui montre que f est analytique.

2. Toute fonction polynômiale est analytique.

La proposition suivante découle directement de la définition :

Proposition 2.3

Soit f une fonction analytique dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe sur U. De plus f est indéfiniment $\mathbb{C}$-dérivabe sur U et l'on a pour tout $z_0 \in U$ et tout z dans un voisinage de z_0 :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.}$$

Nous allons voir au chapitre 2 que la réciproque de la proposition 2.3 est vraie. C'est un résultat très important et surprenant si l'on compare avec les fonctions d'une variable réelle.

Nous terminons cette section avec la proposition suivante qui nous dit que les sommes de séries entières sont analytiques (et donc holomorphes selon la proposition 2.3) :

Proposition 2.4

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit f sa somme. Alors f est analytique sur $D(0,R)$. Plus précisément, pour tout $z_0 \in D(0,R)$ et pour tout $z \in D(z_0, R - |z_0|)$, on a

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.}$$

3. Exponentielle et logarithmes complexes

Dans cette cette section nous allons définir et étudier les propriétés de l'une des fonctions les plus importantes de l'analyse mathématique, à savoir la fonction exponentielle. Nous étudierons ensuite les fonctions logarithmes.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty$. Sa somme qui est donc définie et holomorphe sur $\mathbb{C}$ est appelée fonction exponentielle, elle est notée $z \mapsto \exp(z)$ ou $z \mapsto e^z$. Nous utiliserons dans ce cours la deuxième notation. Ainsi :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lorsque z est réel on retrouve la fonction exponentielle réelle déjà étudiée depuis la classe de terminale. On rappelle également le développement en série entière (réelle) des fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin t$:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Il découle donc de ces deux formules que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

et les formules classiques d'Euler :

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right) \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right).$$

Ces deux formules servent aussi pour définir les fonctions cosinus et sinus complexes en posant :

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \quad \text{et} \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right).$$

La proposition suivante résume les propriétés les plus importantes de la fonction exponentielle :

Proposition 3.1

La fonction exponentielle possède les propriétés suivantes :

1. La fonction exponentielle est l'unique fonction entière f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.
2. Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$. En particulier, $e^z \neq 0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3. $e^z = 1 \iff z \in 2\pi i\mathbb{Z}$. En particulier, $e^0 = 1$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$. En particulier $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$.
5. La fonction exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$.

Il découle de la proposition précédente que les fonctions cos et sin complexes sont des fonctions entières avec $\cos' z = -\sin z$ et $\sin' z = \cos z$.

Dans le cas de la variable réelle, la fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Le logarithme néperien est donc défini comme étant la fonction réciproque de l'exponentielle. Dans le cas complexe, l'exponentielle est surjective (à valeurs dans $\mathbb{C}^*$) mais elle n'est pas injective. Il en résulte ainsi plusieurs déterminations possibles de sa “ fonction réciproque ”. En effet, pour $Z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $e^z = Z$ devient en écrivant $z = x + iy$,

$$\begin{cases} x = \ln|Z| \\ y = \arg(Z), \end{cases}$$

où $\arg(Z)$ est l'argument de Z (modulo 2π). Comme Il existe plusieurs déterminations possibles de l'argument d'un nombre complexe, cela donne autant de possibilités pour définir le logarithme complexe.

Définition 3.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme dans U si elle est continue et si $e^{f(z)} = z$, pour tout $z \in U$.

Nous donnons également la définition de primitive d'une fonction de variable complexe :

Définition 3.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f admet une primitive sur U s'il existe une fonction $F \in \mathscr{H}(U)$ telle que $F' = f$. Dans ce cas on dit que F est une primitive de f.

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}^*$.

1. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme dans U, alors toutes les autres déterminations du logarithme dans U sont de la forme $f + 2n\pi i$, avce $n \in \mathbb{Z}$.
2. Si $f : U \to \mathbb{C}$ est une détermination du logarithme dans U, alors f est holomorphe et $f'(z) = \frac{1}{z}$, pour tout $z \in U$.
3. Si la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ admet une primitive f sur U, alors il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que $f + C$ soit une détermination du logarithme dans U.

Comme on le verra dans le chapitre 2, l'existence d'une primitive d'une fonction holomorphe sur un ouvert U dépend de la topologie de U. Plus précisément, on verra qu'une condition suffisante et nécessaire est que U soit simplement connexe (voir chapitre 2). La proposition suivante va dans ce sens en ce qui concerne la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Proposition 3.3

Il n'existe pas de primitive de la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ dans $\mathbb{C}^*$. Ce qui revient à dire (d'après la proposition 3.2) qu'il n'existe pas de détermination du logarithme dans $\mathbb{C}^*$.

Dans ce qui suit, on va voir qu'il existe des déterminations du logarithme dans les domaines de la forme $U = \mathbb{C}^* \setminus D$, où D est une demi-droite du plan compexe issue de l'origine. On commence par ce que l'on appelle la détermination prinicipale du logarithme défine sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, où $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x \leqslant 0\}$.

Proposition 3.4

Il existe une unique détermination du logarithme dans $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ s'annulant pour $z = 1$, notée Log. Elle est appelée détermination prinipale du logarithme et elle est définie par :

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)$$

où Arg est la fonction “argument princial ” définie, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ par

$$\operatorname{Arg}(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{si } \operatorname{Im}(z) \geqslant 0 \\ -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) & \text{si } \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

La fonction Log admet le développement suivant en série entière, valable pour $z \in D(1,1)$:

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

Des déterminations du logarithme sur d'autres domaines s'ensuivent :

Corollaire 3.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $U_\alpha = \mathbb{C}^* \setminus \{re^{i\alpha} \ : \ r > 0\}$. Alors il existe une détermination du logarithme dans U_α, notée $\operatorname{Log}_\alpha$, qui est donnée par $\operatorname{Log}_\alpha(z) = \operatorname{Log}(e^{i(\pi-\alpha)}z) + i(\alpha - \pi)$, pour tout $z \in U_\alpha$, où Log est la détermination principale du logarithme donnée par la proposition 3.4.

Remarque 3.1

1. Dans la proposition précédente, la fonction exponentielle réalise un difféomorphisme biholomorphe entre U_α et $V_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \alpha - 2\pi < \operatorname{Im}(z) < \alpha\}$. Sa fonction réciproque est $\operatorname{Log}_\alpha$. Notons ici que pour $\alpha = \pi$, on obtient la détermination principale du logarithme, i.e $\operatorname{Log}_\pi = \operatorname{Log}$.
2. Il faut faire attention à la formule $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ valable dans le cas réel avec $a, b > 0$. Cela n'est plus vrai en général pour les déterminations complexes du logarithme.

Les déterminations du logarithme nous permettent de définir les déterminations des racines $n$ième. Tout d'abord on définit ce que c'est une détermination de la racine $n$ième.

Définition 3.3

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On appelle détermination de la racine $n$ième sur U toute fonction continue $f : U \to \mathbb{C}$ telle que $f^n(z) = z$ pour tout $z \in U$.

Il est facile de voir que la détermination de la racine $n$ième est liée à la détermination du logarithme. La proposition suivante est une conséquence directe de la proposition suivante :

Proposition 3.5. (Détermination de la racine $n$ième)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe une unique détermination de la racine $n$ième sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ prenant la valeur 1 pour $z = 1$. Elle est appelée détermination principale de la racine $n$ième et on la note $z \mapsto z^{\frac{1}{n}}$. De plus cette détermination est holomorphe sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ et est donnée par la formule :

$$z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{Log\ z}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{iArg\ z}{n}}.$$

Toute autre détermination de la racine $n$ième sur $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ est de la forme $z^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

En utilisant le corollaire 3.1, on peut définir d'autres déterminations de la racine $n$ième sur d'autres domaines de $\mathbb{C}$.

Chapitre 2

Théorie de Cauchy

1. Intégration sur un chemin

Définition 1.1

Un chemin dans le plan complexe est une application $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux. Un lacet est un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ vérifiant $\gamma(a) = \gamma(b)$ (on dit qu'il est fermé).

Il est important de distinguer un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ de son image $\gamma([a,b])$ (que l'on appelle parfois support de γ) qui est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Par abus de notation on écrira souvent γ au lieu de $\gamma([a,b])$ pour désigner l'image de γ.

Définition 1.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit l'intégrale de f sur un chemin $\gamma : [a,b] \to U$, notée $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, en posant :

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.}$$

Exemple 1.1

1. Pour pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les chemins γ_n déefinis par $\gamma_n(t) = e^{int}$, $t \in [0,2\pi]$ ont pour image le cercle $C(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1. Si l'on prend $f(z) = \frac{1}{z}$, alors on a $\displaystyle\int_{\gamma_n} f(z)dz = in\int_0^{2\pi} e^{-int+int}dt = in\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi in.$
2. Un segment $[A,B]$ du plan complexe a pour paramétrisation le chemin $\sigma_{[A,B]}(t) = (1-t)z_A + tz_B$, $t \in [0,1]$, où z_A et z_B désignent les points d'affixes A et B respectivement. On peut aussi considérer la paramétrisation inverse donnée par le chemin $\sigma_{[B,A]}(t) = tz_A + (1-t)z_B$, $t \in [0,1]$. Ainsi on peut constater facilement que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est continue, on a $\int_{\sigma_{[A,B]}} f(z)dz = -\int_{\sigma_{[B,A]}} f(z)dz$.

Dans la pratique l'image d'un chemin peut être paramétrée de plusieurs façons. La question de savoir si l'intégrale d'une fonction sur un chemin dépend de la paramétrisation choisie nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.3

On dit que deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ sont équivalents s'il existe une bijection $\varphi : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ de classe C^1 vérifiant $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in [a_1, b_1]$ telle que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \varphi$. En particulier, deux chemins équivalents ont la même image.

Nous avons la proposition suivante

Proposition 1.1

Soient γ_1 et γ_2 deux chemins équivalents dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue. Alors on a

$$\boxed{\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.}$$

Exemple 1.2

Les chemins $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = e^{2it}$ sont équivalents. Si l'on considère γ_2 sur $[0, 2\pi]$ au lieu de $[0, \pi]$ les deux chemins cessent d'être équivalents.

Remarque 1.1

D'après la proposition précédente, pour calculer l'intégrale d'une fonction sur un chemin on peut toujours changer l'intervalle de paramétrisation du chemin quitte à le remplacer par un chemin équivalent. Dans la suite de ce chapitre on ne fera pas de distinction entre deux chemins équivalents car les intégrales sur de tels chemins gardent les mêmes valeurs.

On introduit maintenant quelques opérations sur les chemins très utiles dans le calcul des intégrales :

Définition 1.4

1) Soitent $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ deux chemins tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. On appelle chemin concaténé de γ_1 et γ_2 le chemin noté $\gamma_1 * \gamma_2$ définie sur $[0, 2]$ par :

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ \gamma_2(t-1) & \text{si } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

2) On appelle chemin opposé d'un chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ le chemin noté γ^- défini sur $[0, 1]$ par $\gamma^-(t) = \gamma(1-t)$.

Le concaténé de deux chemins γ_1 et γ_2 a pour image l'union des deux images de γ_1 et γ_2 décrites en commençant par γ_1 puis γ_2. L'opposé d'un chemin γ décrit la même image que γ mais dans le sens inverse.

Remarque 1.2

Dans la définition précédente on suppose les chemins définis sur l'intervalle $[0,1]$. En fait on peut toujours définir le concaténé de deux chemins $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ à condition que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. En effet, quitte à les remplacer par des chemins équivalents, on peut toujours supposer que $[a,b] = [c,d] = [0,1]$. De même, on peut toujours définir l'opposé d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ quitte à le remplaçer par un chemin équivalent pour avoir $[a,b] = [0,1]$.

La proposition suivante nous donne le comportement de l'intégrale par rapport aux opérations sur les chemins décrites ci-dessus :

Proposition 1.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors :

1. pour tout chemin γ dans U, on a

$$\boxed{\int_{\gamma^-} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz}$$

2. pour tous chemins γ_1 et γ_2 tels que $\gamma_1 * \gamma_2$ soit bien défini, on a

$$\boxed{\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.}$$

Définition 1.5

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On définit la longueur de γ, notée $l(\gamma)$, en posant

$$\boxed{l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.}$$

Nous avons la proposition suivante :

Proposition 1.3

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors on a pour tout chemin γ dans U :

$$\boxed{\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leqslant l(\gamma) \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.}$$

2. Existence locale et globale des primitives

Dans cette section nous allons donner des conditions permettant l'existence des primitives (au sens complexe) de fonctions continues sur des ouverts du plan complexe.

Définition 2.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On appelle primitive de f sur U toute fonction $F : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et vérifiant $F'(z) = f(z)$ pour tout $z \in U$.

Exemple 2.1

1. La fonction f définie par $f(z) = z^n$, avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, admet comme primitive la fonction $z \mapsto \frac{1}{n+1} z^{n+1}$ sur $\mathbb{C}$ si $n \geqslant 0$ et sur $\mathbb{C}^*$ si $n < 0$. Si $n = -1$, elle admet comme primitive la fonction Log (détermination principale du logarithme vue au chapitre 1) sur $\mathbb{C}^* \setminus D$, où D est la demi droite d'équation $\mathrm{Im}(z) = 0,\ \mathrm{Re}(z) \leqslant 0$. Comme on l'avait déjà signalé au chapitre 1, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.
2. La fonction $z \mapsto e^z$ admet elle-même comme primitive sur $\mathbb{C}$.

La proposition suivante, qui est une conséquence directe de la définition, nous donne l'unicité des primitives à une constante près :

Proposition 2.1

Soit f une fonction continue admettant une primitive F dans un ouvert connexe $U \subset \mathbb{C}$. Alors toute autre primitive de f sur U est de la forme $F + C$, où C est une constante complexe.

Comme nous allons le voir ci-dessous, l'existence de primitives est liée aux intégrales sur des chemins. Nous commençons par la propriété fondamentale suivante très connue dans le cas des fonctions d'une variable réelle :

Proposition 2.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant une primitive F sur U. Alors pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to U$, on a

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).}$$

La proposition suivante nous donne une caratérisation à l'aide des intégrales pour l'existence d'une primitive d'une fonction continue sur un ouvert convexe :

Proposition 2.3

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue.

1. Si f admet une primitive sur U, alors pour tout lacet γ dans U on a
$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$
2. Si U est convexe et si pour tout triangle $T \subset U$ on a $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$, alors f admet une primitive dans U.

Ce que l'on entend par triangle dans la proposition précédente est le triangle plein et le bord ∂T désigne l'ensemble des trois côtés du triangle.

Pour les ouverts connexes du plan complexe vous avons la caractérisation suivante sur l'existence des primitives :

Théorème 2.1

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors f admet une primitive sur U si et seulement si pour tout lacet γ dans U, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Exemple 2.2

D'après le théorème 2.1, la fonction f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = \frac{1}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ (propriété déjà vue au chapitre 1) car si l'on prend le lacet $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (cercle unité paramétré dans le sens usuel), on a $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \neq 0$.

3. Théorème de Cauchy

Dans la section précédente nous avons caractérisé des fonctions admettant des primitives sur un ouvert donné. Nous allons voir dans cette section qu'il s'agit des fonctions holomorphes au moins dans le cas des ouverts convexes. Commençons par le lemme fondamental suivant :

Lemme 3.1. (Lemme de Goursat)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors pour tout triangle $T \subset U$, on a $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$

Remarque 3.1

Le lemme de Goursat reste valable si l'on suppose $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{a\}) \cap C^0(U)$ où a est un point de U. En effet, on peut supposer sans perte de généralité que a est l'un des 3 sommets du triangle T et appliquer le lemme de Goursat ci-dessus. Le détail de la preuve est proposé comme exercice.

Le lemme de Goursat a pour conséquence le théorème très important suivant :

Théorème 3.1. (Théorème de Cauchy pour les ouverts convexes)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors pour tout lacet γ dans U, on a

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 0.}$$

Le théorème de Cauchy est valable dans des ouverts simplement connexes (voir chapitre 3) qui sont plus généraux que les ouverts convexes.

4. Formule de Cauchy

Définition 4.1

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet et soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. On appelle indice de γ en a le nombre complexe, noté $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$, défini par :

$$\boxed{\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-a}dz.}$$

Exemple 4.1

Soit $\gamma_n : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ le cercle paramétré par $\gamma(t) = Re^{int}$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $R > 0$. Alors on a $\mathrm{Ind}_{\gamma_n}(0) = n$.

Proposition 4.1

Pour tout lacet γ, l'application $a \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(a)$ est à valeurs entières ($\mathrm{Ind}_\gamma(a) \in \mathbb{Z}$). Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ et prend la valeur 0 sur la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Remarque 4.1

Le nombre $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ décrit le nombre de tours que fait le lacet γ autour du point a.

Proposition 4.2

Pour tout lacet γ on a

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{\gamma^-}(a) = -\mathrm{Ind}_{\gamma}(a) \text{ pour tout } a \in \mathbb{C} \setminus \gamma.}$$

Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets tels que $\gamma_1 * \gamma_2$ est bien défini, alors

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{\gamma_1 * \gamma_2}(a) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) + \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(a) \text{ pour tout } a \in \mathbb{C} \setminus \gamma_1 * \gamma_2.}$$

Théorème 4.1. (Formule de Cauchy)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert convexe et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors pour tout lacet γ dans U et pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, on a

$$\boxed{f(a)\mathrm{Ind}_{\gamma}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz.}$$

On en déduit le corollaire très pratique suivant :

Corollaire 4.1

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors pour tout disque fermé $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ et pour tout $a \in D(z_0, r)$, on a

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{z-a} dz,}$$

où $C(z_0, r)$ est le cercle de centre z_0 et de rayon r parcouru une seule fois dans le sens usuel (contraire aux aiguilles d'une montre).

Remarque 4.2

Le corollaire précédent nous dit en particulier que les valeurs d'une fonction holomorphe sur le bord d'un disque déterminent ses valeurs à l'intérieur du disque.

La formule de Cauchy a pour conséquence le théorème très important suivant sur l'analyticité des fonctions holomorphes.

Théorème 4.2. (Analyticité des fonctions holomorphes)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(M)$. Soient $z_0 \in U$ et $R = dist(z_0, \mathbb{C} \setminus U)$. Alors pour tout $z \in D(z_0, R)$, on a :

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \; r \in]0, R[.$$

Remarque 4.3

1. Le théorème précédent nous dit que toute fonction holomorphe est analytique avec une précision sur le rayon de convergence de sa série de Taylor au voisinage de chaque point $z_0 \in U$. On en déduit d'après la proposition 2.3 du chapitre 1 que la notion de fonction holomorphe et fonction analytique sont équivalentes.
2. les coefficients a_n dans le théorème 4.2 ne dépendent pas de r contrairement à ce que le laisse apparaître la formule. En effet, comme la fonction f est analytique on a nécessairement $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème précédent :

Corollaire 4.2. (Formule de Cauchy pour les dérivées)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(M)$. Soient $z_0 \in U$ et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$. Alors pour tout $a \in D(z_0, r)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.}$$

Chapitre 3

Propriétés des fonctions holomorphes

1. Prolongement des fonctions holomorphes

Dans la suite on notera par $D^*(a,r)$ le disque ouvert épointé de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$ défini par $D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$. Le théorème suivant nous donne une condition pour qu'une fonction se prolonge par holomorphie :

Théorème 1.1. (Théorème de prolongement de Riemann)

Soit $f : D^*(a,r) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe et bornée. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(a,r)$.

Dans le théorème précédent on dit que a est une singularité apparente ou éliminable de f. On verra dans le chapitre 4 qu'il y a d'autres types de singularités "persistantes". Notons que la condition "f est bornée" est aussi une condition nécessaire pour le prolongement holomorphe car un tel prolongement est nécessairement continu.

Exemple 1.1

1. Les fonctions $z \mapsto f(z) = \frac{\sin z}{z}$ et $z \mapsto g(z) = \frac{e^z-1}{z}$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ (fonctions entières) en posant $f(0) = g(0) = 1$.
2. La fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ ne se prolonge pas en une fonction holomorphe su $\mathbb{C}$ car elle n'est pas bornée au voisinage de 0.

2. Principe du maximum

Le principe du maximum est l'une des propriétés très importantes qui caractérisent les fonctions holomorphes. Nous commençons par un lemme très utile :

Lemme 2.1. (Identité de Parseval)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Alors pour tout $\overline{D(z_0,r)} \subset U$, on a

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{C(z_0,r)} \left|f\left(z_0+re^{it}\right)\right|^2 dt,}$$

où $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$. En particulier on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité dite de Cauchy :

$$\boxed{\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M(r)}{r^n},}$$

où $M(r) = \sup\limits_{|z-z_0|=r} |f(z)|$.

Avant d'énoncer le principe du maximum, fixons quelques notations. Si $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert , on note par $\overline{U}$ l'adhérence de U et par $\partial U = \overline{U} \setminus U$ la frontière de U. On notera par $C^0\left(\overline{U}\right)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{U}$.

Théorème 2.1. (Principe du maximum)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné et soit $f \in \mathscr{H}(U) \cap C^0\left(\overline{U}\right)$. Alors $|f|$ réalise son maximum sur $\overline{U}$ en un point de ∂U, i.e il existe $z_0 \in \partial U$ tel que $|f(z_0)| = \max\limits_{z\in\overline{U}} |f(z)|$. De plus si ce maximum est atteint en un point de U, alors f est constante, i.e s'il existe $z_1 \in U$ tel que $|f(z_1)| = \max\limits_{z\in\overline{U}} |f(z)|$, alors f est constante.

Nous en déduisons le corollaire suivant concernant le minimum :

Corollaire 2.1

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe et borné et soit $f \in \mathscr{H}(U) \cap C^0\left(\overline{U}\right)$ telle que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$. Alors $|f|$ réalise son minimum sur $\overline{U}$ en un point de ∂U, i.e il existe $z_0 \in \partial U$ tel que $|f(z_0)| = \min\limits_{z\in\overline{U}} |f(z)|$. De plus si ce minimum est atteint en un point de U, alors f est constante, i.e s'il existe $z_1 \in U$ tel que $|f(z_1)| = \min\limits_{z\in\overline{U}} |f(z)|$, alors f est constante.

Exemple 2.1

1. Soit $f \in \mathscr{H}(D(0,1)) \cap C^0\left(\overline{D(0,1)}\right)$ telle que $f(0) = 1$ et $|f(z)| > 1$ si $|z| = 1$. En utilisant le corollaire précédent, on peut affirmer que f s'annule au moins une fois sur $D(0,1)$.
2. Considétrons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$. En posant $z = x+iy$ et $g(z) = z^2 e^{z^2}$, on a $f(x,y) = |g(z)|$. D'après le principe du maximum, on a pour tout

$$R>0,\ \max_{(x,y)\in D(0,R)} f(x,y) = \max_{z\in D(0,R)} |g(z)| = \max_{|z|=R} |g(z)| = R^2 e^{R^2}.$$

Remarque 2.1

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé on peut considérer le graphe du module d'une fonction holomorphe comme une surface dans $\mathbb{R}^3$. Le principe du maximum nous dit qu'une telle surface ne peut pas avoir des sommets en des points intérieurs ; ils ne peuvent se trouver que sur le bord. En particulier on peut avoir des sommets intérieurs "infinis" qui correspondent à des points où la fonction n'est pas définie.

3. Théorème de Liouville

Le thèorème dit de Liouville suivant est l'un des grands théorèmes classiques caractérisant les fonctions entières :

Théorème 3.1. (Théorème de Liouville)

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction entière. Si f est bornée, alors elle est constante.

Comme conséquence nous en déduisons un autre thèorème classique :

Corollaire 3.1. (Théorème de Gauss-d'Alembert)

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

et le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. (Croissance polynomiale des fonctions entières)

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ une fonction entière. Supposons qu'il existe $C\geqslant 0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que $|f(z)|\leqslant C|z|^k$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ de module assez grand. Alors f est un polynôme de degré inférieur ou égal à k.

Exemple 3.1

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ entière non constante. En utilisant le théorème de Liouville, on montre facilement que $\overline{f(\mathbb{C})}=\mathbb{C}$.

4. Zéros des fonctions holomorphes

Une autre propriété importante des fonctions holomorphes est le comportement de leurs zéros. On commence par une définition :

Définition 4.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. On dit qu'un point $z_0 \in U$ est un zéro d'ordre fini de f si $f(z_0) = 0$ et s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Dan ce cas le plus petit entier k vérifiant $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ est appelé ordre de z_0 et est noté $\omega(z_0)$. Un zéro qui n'est pas d'ordre fini est dit d'ordre infini. Ainsi z_0 est un zéro d'ordre infini de f si et seulement si $f^{(k)}(z_0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous avons le théorème suivant

Théorème 4.1

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et soit $f \in \mathscr{H}(U)$. Si f admet un zéro d'ordre infini, alors elle est identiquement nulle sur U. Si z_0 est un est zéro d'ordre k de f, alors il existe une fonction $g \in \mathscr{H}(U)$ vérifiant $g(z_0) \neq 0$ telle que $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ pour tout $z \in U$.

Si $f \in \mathscr{H}(U)$, on notera par $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f dans U, i.e

$$Z(f) = \{\, z \in U \ : \ f(z) = 0 \,\}.$$

Le théorème précédent a pour conséquence les deux corollaires suivants :

Corollaire 4.1. (Principe des zéros isolés)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et soit $f \in \mathscr{H}(U)$ non identiquement nulle sur U. Alors pour tout $z_0 \in Z(f)$, il existe $r > 0$ tel que

$$\boxed{Z(f) \cap D(z_0, r) = \{z_0\}\ .}$$

et :

Corollaire 4.2

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et soit $f \in \mathscr{H}(U)$ non identiquement nulle sur U. Alors pour tout compact $K \subset U$, on a $Z(f) \cap K$ est fini. En particulier, l'ensemble $Z(f)$ est fini ou dénombrable.

Nous terminons cette section par un autre corollaire très utile dans le prolongement des fonctions holomorphes

Corollaire 4.3. (Principe du prolongement analytique)

Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert **connexe** et soient $f_1, f_2 \in \mathscr{H}(U)$. Si $f_1 = f_2$ sur un ouvert non vide $V \subset U$, alors $f_1 = f_2$ sur U.

Le corollaire précédent nous dit en particulier que si une fonction holomorphe sur ouvert admet un prolongement (holomorphe) sur un ouvert plus grand et connexe, alors ce prolongement est unique.

5. Comptage des zéros des fonctions holomorphes

Dans cette section on va estimer le nombre des zéros de certaines fonctions holomorphes à l'aide d'intégrales. Dans la suite, lorqu'on compte les zéros d'une fonction dans un ensemble on tient compte de leurs multiplicités. Ainsi un zéro d'ordre k est compté k fois.

Proposition 5.1

Soit $f \in \mathscr{H}(U)$ avec U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{D(z_0, r)} \subset U$. Supposons que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in C(z_0, r)$. Alors

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{C(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz \;=\; \text{Nombre de zéros de } f \text{ dans } D(z_0, r).}$$

Comme dans les sections précédentes, on rappelle que le cercle $C(z_0, r)$ est paramétré dans le sens positif et parcouru une seule fois.

Exemple 5.1

Considérons la fonction f définie par $f(z) = \frac{4z^3+2z}{z^4+z^2+1}$. Pour $r > 0$ et $r \neq 1$, on calcule grâce au théorème précédent,

$$\int_{C(0,r)} f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } r < 1 \\ 8\pi i & \text{si } r > 1. \end{cases}$$

Le théorème suivant nous permet de comparer les nombres de zéros de fonctions holomorphes :

Théorème 5.1. (Théorème de Rouché)

Soient $f_1, f_2 \in \mathscr{H}(U)$ avec U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $\overline{D(a, r)} \subset U$. Supposons que $|f_1(z) - f_2(z)| < |f_1(z)|$ pour tout $z \in C(a, r)$. Alors f_1 et f_2 ont le même nombre de zéros dans $D(a, r)$ (comptés avec leurs multiplicités).

Exemple 5.2

L'équation $z^6+35z^5+3z^4+20z^3+7z^2+z+1=0$ admet 5 solutions dans le disque $D(0,1)$.

L'une des conséquences du thèorème de Rouché est le corollaire très important suivant :

Corollaire 5.1. (Théorème de l'application ouverte)

Toute fonction holomorphe non constante sur un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$ est ouverte. Plus précisément, si U est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathscr{H}(U)$ est non constante, alors pour tout ouvert $V \subset U$, $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

Chapitre 4

Singularities des fonctions holomorphes

1. Théorème de Cauchy pour des ouverts simplement connexes

Le théorème de Cauchy vu au chapitre 2 pour les ouverts connexes se généralise à d'autres ouverts. Pour cela on a besoin de quelques définitions :

Définition 1.1

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soient $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ deux lacets. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans U s'il existe une application $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$ et pour tout $s \in [0,1]$, $H(s,0) = H(s,1)$. L'application H s'appelle homotopie entre γ_0 et γ_1.

Exemple 1.1

Les deux cercles $C(0,1)$ et $C(2,1)$ (parcourus une seule fois dans le sens usuel) sont homotopes dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{C}^*$.

Deux lacets sont homotopes dans U lorsqu'on peut “déformer” continûment l'un des deux pour obtenir l'autre tout en restant dans U. Cette notion a aussi un sens pour des chemins ayant les mêmes extrémités :

Définition 1.2

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soient $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ deux chemins ayant les mêmes extrémités, i.e $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ et $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. On dit que γ_0 et γ_1 sont homotopes dans U s'il existe une application $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$ et pour tout $s \in [0,1]$, $H(s,0) = \gamma_0(0)$ et $H(s,1) = \gamma_0(1)$. L'application H s'appelle homotopie entre γ_0 et γ_1.

Définition 1.3

Un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est dit simplement connexe s'il est connexe et si tout lacet de U est homotope dans U à un point (lacet constant) de U.

Exemple 1.2

Tout ouvert convexe de $\mathbb{C}$ est simplement connexe. Un ouvert privé d'un point n'est pas simplement connexe.

Remarque 1.1

La simple connexité d'un ouvert exprime la propriété que l'ouvert est sans " trous". Dans un ouvert simplement connexe U deux lacets quelconques de U sont homotopes dans U. De même, deux chemins quelconques de mêmes etrémités sont homotopes dans U.

Théorème 1.1. (Théorème de Cauchy version générale)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Les trois propositions suivantes sont vraies et équivalentes :

1. Pour tout lacet γ dans U qui est homotope à un point dans U, on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
2. Pour tous lacets γ_1 et γ_2 homotopes dans U, on a $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.
3. Pour tous chemins γ_1 et γ_2 aux mêmes estrémités et homotopes dans U, on a $\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.1. (Théorème de Cauchy pour les ouverts simplement connexes)

Soit U un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors pour tout lacet γ dans U on a $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

2. Classification des singularités

Définition 2.1

On dit que $a \in C$ est une singularité d'une fonction f s'il existe $r > 0$ tel que $f \in \mathcal{H}(D^*(a,r))$, où $D^*(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\}$. On dit que cette singularité est :

1. apparente (ou éliminable ou éffaçable) si f se prolonge en une fonction holomorphe sur $D(a,r)$.

2. un pôle si $\lim_{z\to a}|f(z)| = +\infty$
3. essentielle si pour tout $r > 0$, $f(D^*(a,r))$ est dense dans $\mathbb{C}$, i.e s $\overline{f(D^*(a,r))} = \mathbb{C}$.

Exemple 2.1

1. 0 est une singularité apparente pour la fonction $z \mapsto \frac{\sin z}{z}$.
2. 0 est une singularité essentielle poour la fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$.
3. 0 est un pôle pour la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Le théorème suivant nous dit que toute singularité est de l'un des trois types décrits dans la définition précédente :

Théorème 2.1. (Classification des singularités)

Soit $f \in \mathcal{H}(D^*(a,r))$. Alors une et une seule des trois propriétés suivantes est vérifiée :

1. a est une singularité apparente pour f.
2. a est un pôle pour f. Plus précisément, ils existent $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{C}$ avec $a_k \neq 0$ et $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$ tels que
$$f(z) = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{(z-a)^j} + g(z), \text{ pour tout } z \in D^*(a,r).$$
3. a est une singularité essentielle pour f.

Remarque 2.1

Lorsque a est un pôle pour f, l'entier k donné par le théorème précédent s'appelle l'ordre du pôle. On peut vérifier facilement en utilisant le théorème 2.1 que a est un pôle d'ordre k pour f si et seulement s'il existe une fonction $h \in \mathcal{H}(D(a,r))$ avec $h(a) \neq 0$ telle que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^k}$, pour tout $z \in D^*(a,r)$.

Définition 2.2

On dit qu'une fonction f est méromorphe sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ s'il existe $A \subset U$ fermé et discret tel que

1. $f \in \mathcal{H}(U \setminus A)$.
2. Tout élément $a \in A$ est un pôle pour f.

On rappelle qu'un ensemble $A \subset \mathbb{C}$ est dit discret si tous les élément de A sont isolés. Autrement dit, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \cap A = \{a\}$.

Exemple 2.2

Toute fraction rationnelle $f = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.

Dans la suite on notera par $\mathcal{M}(U)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur U. On a la propriété très importante suivante :

Proposition 2.1

L'ensemble $\mathcal{M}(U)$ muni de l'addition et multiplication usuelles des fonctions est un corps. En particulier, si $f \in \mathcal{M}(U)$, on a $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(U)$.

3. Séries de Laurent

Soient $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant +\infty$. On appelle anneau de rayon R_1 et R_2 (de centre 0) l'ensemble noté $A(R_1, R_2)$ défini par

$$A(R_1, R_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ R_1 < |z| < R_2 \right\}.$$

Ainsi $A(0, R) = D^*(0, R)$ et $A(0, +\infty) = \mathbb{C}^*$.

Définition 3.1

On appelle série de Laurent dans l'anneau $A(R_1, R_2)$ toute série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n = \sum_{n\geqslant 1} a_{-n} z^{-n} + \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$$

telle que

1. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est convergente dans le disque $D(0, R_2)$
2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_{-n} w^n$ est convergente dans le disque $D\left(0, \frac{1}{R_1}\right)$

Remarque 3.1

Il est facile de voir que si $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ est une série de Laurent dans l'anneau $A(R_1, R_2)$, alors elle est normalement convergente sur tout compact $K \subset A(R_1, R_2)$.

La proposition suivante nous dit que la somme d'une série de Laurent dans un anneau est une fonction holomorphe dans cet anneau que les coefficients de la série de laurent sont déterminés par sa somme :

Proposition 3.1

Soit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$ une série de Laurent dans l'anneau $A(R_1,R_2)$ et soit f sa somme. Alors f est holomorphe sur $A(R_1,R_2)$ et l'on a la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt, \text{ pour tous } n\in\mathbb{Z} \text{ et } r\in]R_1,R_2[.$$

En particulier, on a

$$a_{-1} = \int_{C(0,r)} f(z)dz, \text{ pour tout } r\in]R_1,R_2[.$$

Nous allons montrer l'inverse de la proposition précédente, à savoir, une fonction holomorphe dans un anneau admet un développement en série de Laurent. Nous commençons par montrer la proposition suivante :

Proposition 3.2. (Formule de Cauchy dans un anneau)

Soit $f\in\mathcal{H}(A(R_1,R_2))$ et soient $R_1<r_1<r_2<R_2$. Alors pour tout $z\in A(r_1,r_2)$, on a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw.$$

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit $f\in\mathcal{H}(A(R_1,R_2))$. Alors f admet un unique développement en série de Laurent sur $A(R_1,R_2)$:

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

où les a_n sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt,$$

avec $R_1<r<R_2$ quelconque.

Exemple 3.1

La série de Laurent de la fonction $z\mapsto z^2e^{\frac{1}{z}}$ est donnée par

$$\frac{1}{2}+z+z^2+\sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{-n}}{(n+2)!},\ z\in\mathbb{C}^*$$

4. Théorème des résidus

On commence par une définition :

Définition 4.1

Soit $f \in \mathscr{H}(D^*(a,R))$, avec $R > 0$, et soit

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

son développement en série de laurent. On appelle résidus de f en a le coefficient a_{-1}. On écrit

$$\text{Res}(f,a) = a_{-1}.$$

On a la première caractérisation du résidu :

Proposition 4.1

Soit $f \in \mathscr{H}(D^*(a,R))$. Alors on pour tout $0 < r < R$:

$$\text{Res}(f,a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} f(z)dz.$$

On en déduit le théorème très important des résidus :

Théorème 4.1. (Téorème des résidus)

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit γ un lacet de U homotope à un point. Soient $a_1,\cdots,a_n \in U$ et $f \in \mathscr{H}(U \setminus \{a_1,\cdots,a_n\})$. Alors on a

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f,a_k)\ \text{Ind}_\gamma(a_k).$$

Vue l'importance des résidus, il serait utile de savoir les calculer pour certaines fonctions :

Proposition 4.2

Si f admet un pôle simple (d'ordre 1) en a, alors

$$\text{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Plus généralement si a est un pôle d'ordre k pour f et si l'on pose $g(z) = (z-a)^k f(z)$, alors

$$\text{Res}(f,a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

Le thèorème des résidus s'avère très utile dans le calcul de certaines intégrales réelles .

Exemple 4.1

En utilisant le trhéorème des résidus, on peut calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{2n}}.$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n} t \, dt = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$