Intégrale de Riemann

1. Subdivision d'un intervalle

Dans toute la suite, $[a,b]$ désignera un segment (intervalle compact) de la droite réelle.

Définition 1.1

Une **subdivision** de $[a,b]$ est une suite réelle finie $S=(x_0,\cdots,x_n)$ telle que

$$\boxed{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.}$$

Le nombre $\sup\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|x_{i+1}-x_i|$ s'appelle le **pas** de la subdivision S et est noté $\delta(S)$.

Lorsque les intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ ont tous la même longueur, on dit que la subdivision S est régulière. Dans ce cas, on a pour tout $i=0,\cdots,n$:

$$\boxed{x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)}$$

et le pas de S vaut $\frac{b-a}{n}$.

L'ensemble de toutes les subdivisions de l'intervalle $[a,b]$ sera noté :

$$\boxed{\mathscr{S}_{[a,b]}}$$

2. Sommes de Darboux

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction **bornée** .

Définition 2.1

On appelle **somme de Darboux supérieure** de f par rapport à une subdivision S de $[a,b]$ le nombre, noté $\Sigma(f,S)$, défini par

$$\boxed{\Sigma(f,S)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)M_i,}$$

où $M_i=\sup\limits_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}}f(x)$. De même, on définit la **somme de Darboux inférieure**, notée $\sigma(f,S)$, en posant :

$$\boxed{\sigma(f,S)=\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)m_i,}$$

où $m_i = \inf_{x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}} f(x)$.

Remarque 2.1

1. Le sommes de Darboux sont bien définies car la fonction f est bornée. On vérifie immédiatement que l'on a

$$(b-a)\inf_{a\leqslant x\leqslant b} f(x) \leqslant \sigma(f,S) \leqslant \Sigma(f,S) \leqslant (b-a)\sup_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$$

pour toute subdivision S de $[a,b]$.

2. On peut également montrer (moins évident !) que pour toutes subdivisions S et S' de $[a,b]$, on a

$$\sigma(f,S) \leqslant \Sigma(f,S').$$

3. Intégrabilité au sens de Riemann

Définition 3.1

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est **Riemann-intégrable** (ou intégrable au sens de Riemann) si

$$\boxed{\inf_{S\in\mathscr{S}_{[a,b]}} \Sigma(f,S) = \sup_{S\in\mathscr{S}_{[a,b]}} \sigma(f,S).}$$

Dans ce cas on définit l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ par

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := \inf_{S\in\mathscr{S}_{[a,b]}} \Sigma(f,S) = \sup_{S\in\mathscr{S}_{[a,b]}} \sigma(f,S).}$$

Exemple 3.1

Toute fonction en escalier $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable. De plus si $f(x)=\alpha_i$ sur $]a_i,a_{i+1}[$ avec $a_0=a<\cdots<a_n=b$, alors on a

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i(a_{i+1}-a_i).$$

Le proposition suivante donne un critère qui caractérise les fonctions Riemann-intégrables :

Proposition 3.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S_ε de $[a,b]$ telle que

$$\boxed{\Sigma(f,S_\varepsilon) - \sigma(f,S_\varepsilon) < \varepsilon.}$$

La proposition précédente a pour conséquence le corollaire suivant qui montre « la densité » des fonctions en escalier dans l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables.

Corollaire 3.1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $f_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\int_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)| dx \leqslant \varepsilon.$$

Notons par $\mathscr{F}([a,b])$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et notons par $\mathscr{R}([a,b])$ le sous-ensemble de $\mathscr{F}([a,b])$ constitué des fonctions Riemann-intégrables. Alors on a la proposition suivante :

Proposition 3.2

$\mathscr{R}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}([a,b])$. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. $\mathscr{R}([a,b])$ est stable par passage à la valeur absolue, i.e, si $f \in \mathscr{R}([a,b])$, alors $|f| \in \mathscr{R}([a,b])$ et l'on a $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.
2. l'application $L : \mathscr{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = \int_a^b f(x)dx$ est linéaire, i.e pour toutes $f, g \in \mathscr{F}([a,b])$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$.
3. l'application $L : \mathscr{R}([a,b]) \to \mathbb{R}$ définie par $L(f) = \int_a^b f(x)dx$ es tcroissante, i.e $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$ si $f \leqslant g$.

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.1

Toute fonction f continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, la fonction $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est une primtive de f.

Corollaire 3.2

Toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exemple 3.2

Considérons la fonction $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On peut vérifier facilement que pour toute subdivision S de $[0,1]$, on a $\sigma(f,S)=0$ et $\Sigma(f,S)=1$. On en déduit que f n'est pas Riemann-intégrable.

Remarque 3.1

1. Soit $f\in\mathscr{R}([a,b])$. On peut vérifier (voir exercices) que pour tout $c\in[a,b]$, $f\big|_{[a,c]}\in\mathscr{R}([a,c])$, $f\big|_{[c,b]}\in\mathscr{R}([c,b])$ et $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$.
2. En utilisant le corollaire 3.1, il est facile de voir que l'ensemble des fonctions continues est dense dans l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables dans le sens suivant : si $f\in\mathscr{R}([a,b])$, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe $f_\varepsilon:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|dx\leqslant\varepsilon.$$

4. Sommes de Riemann

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction bornée et pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $S=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$ une subdivision de $[a,b]$.

Définition 4.1

On appelle **somme de Riemann** de f par rapport à S toute somme de la forme :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(c_i)}$$

où $(c_0,\cdots,c_{n-1})$ est une suite finie de réels telle que $x_i\leqslant c_i\leqslant x_{i+1}$ pour tout $i=0,\cdots n-1$. Une telle somme ets notée $\mathscr{R}(f,S)$.

Nous avons le théorème très important suivant

Théorème 4.1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = (x_{0,n}, x_{1,n}, \cdots, x_{n,n})$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $\delta(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors pour toute fonction f Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et pour toute somme de Riemann $R(f,S_n)$ de f par rapport à S_n, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} R(f,S_n) = \int_a^b f(x)dx.}$$

Ce théorème est utilisé dans le calcul de limite de certaines suites. Il est appliqué généralement avec une subdivsion régulière d'un intervalle $[a,b]$. Plus précisément, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 4.1

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) = \int_a^b f(x)dx.}$$

5. Exercices

Exercice 5.1

Montrer que toute fonction monotone sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 5.2

Soit $f \in \mathscr{R}([a,b])$.

1. Montrer que pour tout $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, on a $f\big|_{[\alpha,\beta]} \in \mathscr{R}([\alpha,\beta])$.
2. Montrer que pour tout $c \in [a,b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Exercice 5.3

Démontrer le corollaire 3.1 (en utilisant le théorème fondamental 3.1).

Exercice 5.4

Montrer qu'une fonction f bornée sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S_ε de $[a,b]$ telle que $\Sigma(f,S_\varepsilon) - \sigma(f,S_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 5.5

Montrer que si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors il en est de même pour $|f|$. Que pensez-vous de la réciproque ?

Exercice 5.6

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

Exercice 5.7

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{2n}{n}^{\frac{1}{n}} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{pn}\frac{1}{k}\text{ , avec } p\in\mathbb{N}^* \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(1+k+n)}}.$$

Exercice 5.8

Soit f une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 \log f(x)dx \leqslant \log\left(\int_0^1 f(x)dx\right).$$

Exercice 5.9

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

En déduire la valeur de l'intégrale suivante

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$