Rachid Regbaoui

Feuille d'exercices 1

Exercice 1

Soit (X,d) un espace métrique et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

1) Montrer que si φ satisfait l'hypothèse suivante :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 0 \iff x = 0 \\ \varphi \text{ est croissante} \\ \varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b), \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

alors l'application $\varphi \circ d$ est une distance sur X.

2) Lesquelles des applications suivantes sont des distances sur X ?

$$x(,y) \mapsto \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \;\; ; \;\; (x,y) \mapsto \sqrt{d(x,y)} \;\; ; \;\; (x,y) \mapsto d^2(x,y) \;\; ; \;\; (x,y) \mapsto \min(1, d(x,y))$$

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle.

1) Montrer que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x \neq 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

2) Montrer que l'ensemble $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \leqslant 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

3) Trouver l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants dans $\mathbb{R}$:

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\;\; ; \;\; B = \mathbb{Z} \;\; ; \;\; C = \left\{ \frac{1}{n} \;:\; n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

puis l'adhérence de l'ensemble $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \;:\; x \leqslant 0\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit (X,d) un espace métrique et A un sous-ensemble de X. Montrer que A est fermé dans (X,d) si et seulement si pour toute suite convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \in A$.

Exercice 4

On notera d la distance discrète.

1. Montrer que l'ensemble $]\sqrt{2},\sqrt{3}]$ est ouvert et fermé dans $(\mathbb{R},d)$.
2. Montrer que l'ensemble $]\sqrt{2},\sqrt{3}]$ n'est ni ouvert et ni fermé dans $(\mathbb{R},|.|)$.
3. Montrer que $]\sqrt{2},\sqrt{3}]$ est à la fois ouvert et fermé dans $(\mathbb{Q},|.|)$.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble $A = \left\{ \sqrt{m} - \sqrt{n} \ : \ m,n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ que l'on supposera non réduit à $\{0\}$. On désigne par a la borne inférieure de l'ensemble

$$G_+^* = \{ x \in G \ : \ x > 0 \}.$$

1) On suppose $a > 0$. Montrer que $a \in G$ et que $G = a\mathbb{Z}$.

2) On suppose que $a = 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$. En déduire que G dense dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que les seuls sous-groupes fermés de $\mathbb{R}$ autres que $\mathbb{R}$ sont les groupes de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$ et montrer que tout sous-groupe non fermé de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer ques les ensembles $\{ \cos(n\theta) \ : \ n \in \mathbb{Z} \}$ et $\{ \sin(n\theta) \ : \ n \in \mathbb{Z} \}$ sont denses dans $[-1,1]$.

Exercice 7

Soit $X : C^0([0,1])$ et $A = \{ f \in X \ : \ f(x) \geqslant 0 \ \forall \ x \in [0,1] \}$. On considère sur X les deux distances

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad \text{et} \quad d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

1) Décrire $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ pour d_1.

2) Décrire $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ pour d_∞.

Exercice 8

Vrai ou faux :

1. Il existe un espace métrique contenant 15 ouverts et 17 fermés.
2. Toute suite convergente dans un espace métrique est bornée.
3. Tout singleton d'un espace métrique est fermé.