M1 Variable complexe – Feuille de TD 6 – Paul Baird

§5. Zéros, pôles et le théorème de Rouché.

1. Montrer que
$$\int_{C(0,2)} \frac{e^{az}}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sin a$$

2. On se rappelle que $ord(f,a)$ est le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ dans la série de Laurent de f en $z = a$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$. Si $ord(f,a) = k > 0$ et $ord(g,a) = k+1$, montrer que
$$res(f/g,a) = (k+1)\frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k+1)}(a)}$$

3. Trouver les résidus des fonctions suivantes aux points indiqués :
$$\frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^3+z} \text{ en i et 1,} \quad \frac{1}{1-\cos z} \text{ en 0,} \quad \frac{1}{(z-1)^2(z+1)} \text{ en 1,} \quad \frac{1}{z-\sin z} \text{ en 0.}$$

4. (i) Montrer que si $ord(f,a) = -1$ et $ord(g,a) = 0$, alors $res(fg,a) = g(a)res(f,a)$.

(ii) Montrer que si $ord(f,a) = 0$ et $ord(g,a) = 1$, alors $res(f/g,a) = f(a)/g'(a)$.

(iii) Montrer par un exemple, que (i) n'est plus vraie si $ord(f,a) \leq -2$.

5. On suppose que f holomorphe dans un ouvert U simplement connexe sauf en un nombre fini de pôles. Soit $\gamma : [0,1] \to U$ un chemin continu. On suppose aussi que $\{z \in U : ord(f,z) \neq 0\}$ est un ensemble fini $\{z_1,\ldots,z_n\}$ disjoint de $\gamma([0,1])$. On écrit
$$ZP(f,\gamma) := \sum_{j=1}^{n} ord(f,z_j)ind(\gamma,z_j)$$
où $ind(\gamma,z_j)$ est l'indice de γ par rapport à z_j.

Soit g une fonction holomorphe en U sauf en un nombre fini de pôles disjoints de $\gamma([0,1])$ et que pour tout $z \in \gamma([0,1])$ on a $|g(z)| < |f(z)|$.

(i) Montrer que $\inf\{|f(z)| - |g(z)| : z \in \gamma([0,1])\} = \delta > 0$.

Pour $0 \leq t \leq 1$, soit
$$E(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\mathrm{d}z$$

(ii) Montrer que $E(t)$ est bien définie et prend ses valeurs dans les entiers.

(iii) Montrer que pour $0 \leq t < u \leq 1$ et $z \in \gamma([0,1])$, on a
$$\left|\frac{(f'+ug')(z)}{(f+ug)(z)} - \frac{(f'+tg')(z)}{(f+tg)(z)}\right| \leq \frac{u-t}{\delta^2}|f'g-fg')(z)|$$
et par suite que $|E(u) - E(t)| \leq k(u-t)$ pour une constante k indépendante de t et u.

(iv) Montrer que si $u - t < 1/k$ alors $|E(u) - E(t)| < 1$ et donc $E(u) = E(t)$.

(v) En déduire que $E(1) = E(0)$ et que $ZP(f+g,\gamma) = ZP(f,\gamma)$.