M1 Variable complexe – Feuille de TD 5 – Paul Baird

§5. Points singuliers et la série de Laurent.

Dans ce chapitre, pour une fonction $f(z)$ avec série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ telle que $a_n \neq 0$ pour un nombre fini de $n < 0$, on écrit $\mathrm{ord}(f,a)$ pour le plus petit entier n pour lequel $a_n \neq 0$. Dans ce cas on dit que f est d'ordre fini en $z = a$. Si $a_n \neq 0$ pour un nombre infini de $n < 0$, on dit que f présente une singularié essentielle en $z = a$.

1. Étudier les singularités et les zéros de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$$

2. Trouver la série de Laurent de la fonction $f(z) = e^{1/z}$.

3. Soient f et g des fonctions d'ordre fini en $z = a$. Montrer que

a) $\mathrm{ord}(fg,a) = \mathrm{ord}(f,a)+ \mathrm{ord}(g,a)$;

b) $\mathrm{ord}(1/f,a) = -\mathrm{ord}(f,a)$;

c) si $\mathrm{ord}(f,a) < \mathrm{ord}(g,a)$, alors $\mathrm{ord}(f+g,a) = \mathrm{ord}(f,a)$.

d) Si $a = 0$ et f est paire (impaire), que $\mathrm{ord}(f,0)$ est pair (impair).

4. Soit $f(z) = 1/z(z^2+1)$. Écrire la série de Laurent pour f dans le disque pointé $D(0,1) \setminus \{0\}$ et aussi dans l'ensemble $\{z : |z| > 1\}$.

5. Trouver toutes les singularités des fonctions suivantes en précisant l'ordre de leurs pôles :

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^2+1}, \quad \frac{z}{\sin z}, \quad e^{z+(1/z)}, \quad \frac{1}{e^{z^2}-1}$$

7. Soit $B \subset \mathbf{C}$ borné. Montrer que la fonction $\exp(\mathbf{C} \setminus B) = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. En déduire que $\cos(\mathbf{C} \setminus B) = \mathbf{C}$.

8. Soit f entière et supposons qu'il existent $k > 0$, $R > 0$ et un entier positif n tels que $|f(z)| \geq k|z|^n$ lorsque $|z| > R$. Montrer que f est polynomiale. Que peut-on dire sur le degré de f ?

9. Soit f holomorphe dans $\mathbf{C}$ sauf en un nombre fini de points. Supposons que $zf(z) \to 0$ lorsque $z \to \infty$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que $\{z^2 f(z) : |z| > R\}$ est borné.

10 On suppose que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n = B$ et que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ et $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n|$ sont convergentes. Montrer que pour chaque n, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$ est convergente, disons à c_n, et que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = AB$ (soit $A_n := a_{-n} + \cdots + a_n$, etc., et montrer que pour

$k, l > 2n$, la somme $c_{-k} + \cdots + c_l$ s'approche de $A_n B_n$). En déduire que la série de Laurent pour le produit de deux fonctions est formellement la série obtenue en multipliant les termes de leures séries de Laurent.

En considérant la série de Laurent de la fonction $e^{z+(1/z)}$ en $z = 0$, montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\cos t} \cos nt \, \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!} \quad (n \geq 0).$$