M1 Variable complexe – Feuille de TD 4 – Paul Baird

§3. Formule de Cauchy, série de Taylor-Lagrange, fonctions entières.

1. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un chemin fermé différentiable par morceaux et soit $f : U \to \mathbf{C}$ où U est un ouvert contenant $\gamma([0,1])$. Si $\{f(z) : z \in \gamma([0,1])\} \cap \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\} = \emptyset$, Montrer que

$$\int_\gamma \frac{f'}{f} \mathrm{d}z = 0\,.$$

2. Calculer

$$\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z$$

pour (i) $|a|, |b| < 1$, (ii) $|a| < 1, |b| > 1$, (iii) $|a|, |b| > 1$, où $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens contre l'aiguille d'une montre.

3. Calculer

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z \qquad \text{et} \qquad \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{\pi \mathrm{i} - 2z} \mathrm{d}z$$

4. Montrer que la série de Taylor-Lagrange de la fonction $1/(1-z+z^2)$ en 0 est $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ où $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+3} = -a_n$ $(n \geq 0)$. Quel est le rayon de convervence de la série ?

5. Soit γ_R le contour défini par le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle situé dans le demi-plan supérieur de diamètre le segment $[-R, R]$ avec $R > 1$. Calculer

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{1+z^2} \mathrm{d}z\,.$$

En déduire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

6. Soit f une fonction entière non-constante. Montrer que pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$, l'ensemble $\{z \in \mathbf{C} : f(z) = \lambda\}$ est soit fini soit infiniment dénombrable. En déduire que $f(\mathbf{C})$ n'est pas dénombrable.

7. Calculer

$$\int_{C(\mathrm{i},2)} \frac{e^z}{(z-1)^n} \mathrm{d}z$$

pour n un entier positif.

8. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et supposons que f a un nombre fini de zéros dans U. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $u(z)v(z)$ où $u(z)$ est polynomiale et $v(z)$ est non-nulle et holomorphe dans U.

9. Trouver une fonction entière qui n'est pas polynomiale et qui a (i) aucun zéro ; (ii) exactement un zéro ; (iii) une infinité de zéros.

10. Soit f une fonction entière. Supposons qu'il existe $a \in \mathbf{C}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z) - a| > \varepsilon$ pour tout z. Montrer que f est constante. En déduire que si f est non-constante entière, alors $f(\mathbf{C})$ est dense dans $\mathbf{C}$.