## M1 Variable complexe – Feuille de TD 1 – Paul Baird

### §1. Notions de base

**1.** (les complexes) (i) Soit $\mathrm{Im}\, a, \mathrm{Im}\, b > 0$. Montrer que $\left|\dfrac{a-b}{a-\bar{b}}\right| < 1$ ;
(ii) Pour des nombres complexes $a, b$, montrer que

$$|1-\bar{a}b|^2 - |a-b|^2 = (1-|a|^2)(1-|b|^2)\,.$$

en déduire que si $|a| < 1$ et $|b| < 1$ alors

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1.$$

(iii) Soit $f(x+\mathrm{i}y) = xy/(x^2+y^2)$ pour $x+\mathrm{i}y \neq 0$. Est-ce-que $f(z)$ présente une limite lorsque $z \to 0$ ?

**2.** (suites) (i) Montrer que toute suite convergente dans $\mathbf{C}$ est bornée.
(ii) Si $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, montrer que $(a_1 + \cdots + a_n)/n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

**3.** (séries) (i) Donner un exemple d'une série entière qui converge pour tout $z \in \mathbf{C}$, puis une qui ne converge que lorsque $z = 0$.
(ii) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} = S(z)$ pour tout $|z| < R$, où $R > 0$. Si $S(x)$ est réelle pour tout $x$ réel avec $|x| < R$ montrer que chaque $a_n$ réel. Si $S(z)$ est paire, montrer que $a_n = 0$ pour tout $n$ impaire.
(iii) Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ n'est pas uniformément convergente sur $D(0,1) := \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| < 1\}$.
(iv) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, $\theta \neq \pi$. Montrer que si $|z| < 1$, la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$$

converge absolument.
(v) Montrer que, pour $z = e^{\mathrm{i}\theta}$ ou $z = e^{-\mathrm{i}\theta}$, la série de la partie (iv) diverge. En déduire le rayon de convergence de cette série.

**4.** (séries) Soit $S(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Montrer que pour tout $r < R$ on a

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta = \sum_{n\geq 0} |a_k|^2 r^{2k}.$$

Montrer que si $R = \infty$ et si $S$ est une fonction bornée dans $\mathbf{C}$, alors $S$ est forcément constante.

**5.** (chemins) Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbf{C}$ un chemin. Si $|\gamma(0)| < 1$ et $|\gamma(1)| > 1$, montrer que $\gamma([0,1])$ contient un point de module 1.

**6.** (sphère de Riemann) Soit $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbf{C}$ la projection stéreographique. Quelle est l'image par $\sigma$ d'un cercle $\Gamma$ de $S^2$ (privé eventuellement de son pôle nord si $N \in \Gamma$).

**7.** (cercles) Soit $\Gamma$ un sous-ensemble de $\mathbf{C}$. Montrer que $\Gamma$ est un cercle de $\mathbf{C}_\infty$ si et seulement si il existe $\alpha, \delta \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{C}$ avec $|\beta|^2 - \alpha\delta > 0$ tels que

$$\Gamma = \{z \in \mathbf{C} |\ \alpha|z|^2 + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \delta = 0\}$$

(on entend ici par cercle dans $\mathbf{C}_\infty$ un cercle de $\mathbf{C}$ ou une droite passant à l'infini).

**8.** (homographies) Une homographie est une application $f : \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ de la forme :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & si \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{-d/c\} \\ \infty & si \quad z = -d/c \\ a/c & si \quad z = \infty \end{cases}$$

où $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ sont tels que $ad - bc \neq 0$.

(i) Montrer que si $c \neq 0$ on a

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\frac{1}{z+\frac{d}{c}}.$$

En déduire que $f$ peut s'écrire comme la composée d'une similitude directe (Une transformation que multiplie toutes des distance par une constante fixe et qui préserve l'orientation), d'une inversion ($z \mapsto 1/z$) et de deux translations.

(ii) Montrer que toute homographie est un homéomorphisme de $\mathbf{C}_\infty$ sur lui-même.

(iii) Montrer que l'image par une homographie d'un cercle ou d'une droite est un cercle ou une droite.