Variable complexe – Paul Baird

§5. Points singuliers et la série de Laurent

Un point $a \in \mathbf{C}$ est un *point singulier isolé* d'une fonction f s'il existe $R > 0$ tel que f est définie et holomorphe dans le disque pointé $D(a,R)\backslash\{a\}$, mais pas dans $D(a,R)$. On dit qu'un tel point est *éliminable* s'il existe une fonction holomorphe $g : D(a,R) \to \mathbf{C}$ telle que $g(z) = f(z)$ pour tout z avec $0 < |z-a| < R$.

Exemples : $\sin z/z$, $1/z$, $\exp(1/z)$ possèdent des points singuliers isolés en $z = 0$. Ce point est éliminable que dans le premier cas.

Théorème 5.1 : Soit $a \in \mathbf{C}$ un point singulier isolé d'une fonction f ; alors $z = a$ est éliminable si et seulement si

$$\lim_{z \to a} (z-a)f(z) = 0\,.$$

Preuve : Soit f holomorphe dans $\{z : 0 < |z-a| > R\}$ et définissons $g(z) = (z-a)f(z)$ pour tout $z \neq a$ et $g(0) = 0$. Si $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$, on voit que g est continue. Si on peut démontrer que g est holomorphe il suivra que a est éliminable, car on aura $g(z) = (z-a)h(z)$ avec h holomorphe dans $D(a,R)$.

Pour démontrer que g est holomorphe on applique le théorème de Moréra (Théorème 4.4). Soit Δ un triangle avec $\overline{\Delta} \subset D(a,r)$. Si $a \notin \overline{\Delta}$ alors $\partial\Delta \sim 0$ dans $\{z : 0 < |z-a| < R\}$ et donc, en appliquant le théorème de Cauchy, on a $\int_{\partial\Delta} g\mathrm{d}z = 0$.

Soit a un sommet de $\partial\Delta$, alors $\partial\Delta = [a \to b \to c \to a]$. Soit $x \in [a \to b]$ et $y \in [c \to a]$ et construisons le triangle $\Delta_1 = [a \to x \to y \to a]$. Soit P le polygône $[x \to b \to c \to y \to x]$. Alors

$$\int_{\partial\Delta} g = \int_{\partial\Delta_1} g + \int_{\partial P} g = \int_{\partial\Delta_1} g$$

puisque $P \sim 0$ dans le disque pointé $D(a,R) \setminus \{a\}$. Puisque g est continue et $g(a) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir x et y tels que $|g(z)| \leq \varepsilon/L(\partial\Delta)$ pour tout $z \in \partial_{\Delta_1}$. Il s'ensuit que

$$\left|\int_{\partial\Delta} g\right| = \left|\int_{\partial\Delta_1} g\right| \leq \varepsilon\,.$$

Puisque ε est arbitraire on en déduit que $\int_{\partial\Delta} g = 0$.

Soit $a \in \Delta$ et soit $\partial\Delta = [x \to y \to z \to x]$. On définit les triangles $\Delta_1 = [x \to y \to a \to x]$, $\Delta_2 = [y \to z \to a \to y]$ et $\Delta_3 = [z \to x \to a \to z]$. Par la discussion précédente, on en déduit que $\int_{\partial\Delta_j} g = 0$ pour chaque $j = 1,2,3$, et donc

$$\int_{\partial\Delta} g = \int_{\partial\Delta_1} g + \int_{\partial\Delta_2} g + \int_{\partial\Delta_3} g = 0\,.$$

Par le théorème de Moréra, g est holomorphe et a est éliminable. La reciproque est évident. $\square$

Pôle : Soit $z = a$ un points singulier isolé d'une fonction f holomorphe dans un disque pointé $D(a, R) \setminus \{a\}$.
(i) On dit que a est un *pôle* de f si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$. C'est à dire, pour tout $M > 0$, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $0 < |z - a| < \varepsilon$ entraîne $|f(z)| > M$.
(ii) On dit que a est un *point singulier essentiel* si ce point est ni un point singulier éliminable, ni un pôle.

Exemples : 1. $f(z) = (z - a)^{-m}$ présente un pôle au point $z = a$.
2. $f(z) = e^{1/z}$ présente un point singulier essentiel au point $z = 0$.
3. $f(z) = \tan(1/z)$ présente un point singulier non-isolé en $z = 0$ (exercice : vérifier cette affirmation).

Théorème 5.2 : Soit U un ouvert et soit $a \in U$. Soit f holomorphe dans $U \setminus \{a\}$ avec a un pôle de f. Alors, il existe un entier positif m et une fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$ avec $g(a) \neq 0$ tels que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - a)^m}$$

L'entier m s'appelle *l'ordre du pôle a*.

Preuve : Il s'ensuit que $1/f(z)$ présente un point singulier éliminable au point $z = a$. Ainsi $h(z)$ définie par

$$h(z) = \begin{cases} 1/f(z) & \text{si} \quad z \neq a \\ 0 & \text{si} \quad z = a \end{cases}$$

est holomorphe dans un disque $D(a, R)$ de rayon $R > 0$. Puisque $h(a) = 0$, il suit que $h(z) = (z - a)^m h_1(z)$ avec $h_1(z)$ holomorphe et $h_1(a) \neq 0$, $m \geq 1$. Donc

$$(z - a)^m f(z) = 1/h_1(z)$$

présente un point singulier éliminable en $z = a$. Soit $g(z) = 1/h_1(z)$. $\square$

Soit $z = a$ un pôle isolé d'ordre m d'une fonction f et soit $f(z) = g(z)(z - a)^{-m}$ dans un voisinage de a. Puisque g est holomorphe dans un disque $D(a, R)$ avec $R > 0$, elle s'écrit sous la forme :

$$g(z) = A_m + A_{m-1}(z - a) + \cdots A_1(z - a)^{m-1} + (z - a)^m \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - a)^k .$$

avec $A_m \neq 0$, d'où

$$f(z) = \frac{A_m}{(z - a)^m} + \cdots \frac{A_1}{(z - a)} + g_1(z) \tag{1}$$

avec g_1 holomorphe dans $D(a,R)$. $g_1(z)$ s'appelle la *partie régulière* de f et $f(z)-g_1(z)$ la *partie singulière*.

Séries doublement infinies : Soit $\{z_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ une suite doublement infinie. On dit que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ converge absolument si les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ convergent absolument. Dans ce cas $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} z_n$. Soit $\{u_n(s)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble S et supposons que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(s)$ converge absolument pour tout $s \in S$, alors la convergence est uniforme dans S si les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(s)$ et $\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}(s)$ convergent uniformément dans S.

Définition : Soit $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ et soit $a \in \mathbf{C}$. On définit la coronne

$$\mathrm{cor}\,(a; R_1, R_2) := \{z \in \mathbf{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}.$$

On note que $\mathrm{cor}\,(a;0,R_2)$ est le disque pointé $D(a,R_2) \setminus \{a\}$ et que $\mathrm{cor}\,(a,R_1,\infty)$ est l'extérieur du disque $D(a,R_1)$.

Théorème 5.3 (Laurent) : Soit $f(z)$ holomorphe dans la coronne $\mathrm{cor}\,(a;R_1,R_2)$. Alors

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

où la convergence est uniforme et absolue dans toute coronne $\mathrm{cor}\,(a;r_1,r_2)$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, et les coefficients sont données par

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \mathrm{d}z \tag{2}$$

où γ est un cercle $|z-a| = r$ pour r quelconque : $R_1 < r < R_2$.

Preuve : Soit $z \in V = \mathrm{cor}\,(a;R_1,R_2)$ et soit la coronne $V' = \mathrm{cor}\,(a;r_1,r_2)$, $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ tel que $z \in V'$. La formule intégral de Cauchy entraîne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial V'} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w \tag{3}$$

où γ_1, γ_2 sont les cercles $|z-a| = r_1$ et $|z-a| = r_2$ respectivement.

Pour tout $w \in \gamma_2$ on a $\left|\frac{z-a}{w-a}\right| < 1$, donc par la série géométrique on en déduit que

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)\left[1 - \left(\frac{z-a}{w-a}\right)\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

converge absolument et uniformément en w pour $w \in \gamma_2$. En multipliant par la fonction bornée $f(w)/2\pi \mathrm{i}$ et en intégrant terme à terme le long de γ_2 on obtient

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \mathrm{d}w$$

pour $n = 0, 1, 2, \ldots$. La 2ème intégrale de la partie droite de (3) est décomposée de manière similaire. Pour tout $w \in \gamma_1$ on a $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < 1$ donc on obtient une série géométrique

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-a)\left[1 - \left(\frac{w-a}{z-a}\right)\right]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}$$

qui converge absolument et uniformément le long de γ_1. En multipliant par la fonction bornée $f(w)/2\pi\mathrm{i}$ et en intégrant terme à terme le long de γ_1 on en déduit

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

où

$$d_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} f(w)(w-a)^{n-1} \mathrm{d}w$$

pour $n = 1, 2, \ldots$. Dans la dernière expression, remplaçons l'indice $n \in \{1, 2, \ldots\}$ par $-n \in \{-1, -2, \ldots\}$ et posons

$$a_n = d_{-n} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \mathrm{d}w \qquad n = -1, -2, \ldots$$

On en déduit alors le développement (2). D'après le théorème de Cauchy sur les homotopies, dans les expressions pour les coefficients a_n, on peut remplacer les cercles γ_2 et γ_1 par n'importe quel cercle $\gamma : |z-a| = r$ avec $R_1 < r < R_2$ □

La série du théorème précédant s'appelle *série de Laurent* de la fonction f dans la coronne V. L'ensemble des puissances positives s'appelle *partie régulière*, celui des puissances négatives *partie principale* ou *partie singulière*.

Corollaire 5.4 : Soit $z = a$ un point singulier isolé d'une fonction f holomorphe dans $D(a, R) \setminus \{a\}$ et supposons que $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$ est la série de Laurent dans la coronne $\operatorname{cor}(a; 0, R)$. Alors

(i) $z = a$ est éliminable si et seulement si $a_n = 0$ pour tout $n \leq -1$;

(ii) $z = a$ est un pôle d'ordre m si et seulement si $a_{-m} \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \leq -(m+1)$;

(iii) $z = a$ est un point singulier essentiel si et seulement si $a_n \neq 0$ pour un nombre infini des entiers négatifs n.

Preuve : (i) Soit $a_n = 0$ pour $n \leq -1$. Alors $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ est holomorphe dans le disque $D(a, R)$ et est confondue avec $f(z)$ dans le disque pointé $D(a, R) \setminus \{a\}$. Reciproque : exercice.

(ii) Soit $a_n = 0$ pour $n \leq -(m+1)$; alors $(z-a)^m f(z)$ se développe en série de Laurent régulière. En appliquant (i), $(z-a)^m f(z)$ présente un point singulier éliminable en $z = a$. Pour la reciproque, on inverse cet argument.

(iii) Conséquence de (i) et (ii). □

Théorème 5.5 (Casorati-Weierstrass) : Soit $z = a$ un point singulier essentiel isolé d'une fonction f holomorphe dans $D(a, R) \setminus \{a\}$; alors pour tout $\delta > 0$, l'adhérence $\overline{f(cor(a; 0, \delta))} = \mathbf{C}$ (c'est à dire, lorsque $z \to a$, la fonction $f(z)$ s'approche d'une distance arbitrairement petite chaque nombre complexe).

Preuve : Soit f holomorphe dans $D(a, R) \setminus \{a\}$; il nous faut démontrer que si $c \in \mathbf{C}$ et $\varepsilon > 0$ sont quelconques, alors pour tout $\delta > 0$ il existe z avec $|z - a| < \delta$ tel que $|f(z) - c| < \varepsilon$. On raisonne par l'absurde.

Supposons qu'il existe $c \in \mathbf{C}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ pour tout $z \in U := D(a, \delta) \setminus \{a\}$. Il s'ensuit que $\lim_{z \to a} \frac{|f(z)-c|}{|z-a|} = \infty$ et donc $(f(z) - c)/(z - a)$ présente un pôle au point $z = a$. Soit m l'ordre de ce pôle. Alors $\lim_{z \to a} |z-a|^{m+1}|f(z)-c| = 0$ et par conséquence

$$|z - a|^{m+1}|f(z)| \leq |z - a|^{m+1}|f(z) - c| + |z - a|^{m+1}|c|$$

tend vers 0 lorsque $z \to a$. Alors Théorème 5.1 entraîne que $f(z)(z - a)^m$ présente un point singulier éliminable au point $z = a$, contrairement à l'hypothèse. □

Fonctions méromorphes : La nature d'un point singulier fini est déterminée par la partie principale du développement en série de Laurent. A l'infini par contre, les puissances négatives sont régulières et la singularité est déterminée par l'ensemble des puissance positives (en effet on remplace z par $1/w$). Par conséquence, la partie principale du développement d'une fonction en série de Laurent dans un voisinage pointé du point à l'infini $\mathrm{cor}\,(0, R, \infty)$ est l'ensemble des puissance positives. Ainsi modifiés les théorèmes précédants seront valables aussi pour le cas $a = \infty$, par exemple, $a = \infty$ présente un pôle d'ordre m si et seulement si $a_m \neq 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n \geq m + 1$. En effet, on obtient les résultats en faisant le changement de variable $z = 1/w$.

Définition Une fonction holomorphe dans $U \subset \mathbf{C}_\infty$ sauf en un ensemble des points isolés où elle ne présente que des pôles, s'appelle une fonction *méromorphe*.

Théroème 5.6 : Une fonction méromorphe définie sur $\mathbf{C}_\infty$ est rationnelle.

Preuve : Les pôles sont en nombre fini en raison de la compacité de $\mathbf{C}_\infty$. Désignons par a_j $(j = 1, \ldots, q)$ les pôles de f. On applique la récurrence sur q. Si $q = 1$, soit m_1

l'ordre du pôle a_1. Si a_1 est fini alors $g(z) = (z-a_1)^{m_1} f(z)$ est régulière polynomiale (car f n'a pas de pôle en $z = \infty$). Il s'ensuit que $f(z) = g(z)/(z-a)^{m_1}$ est rationnelle. D'autre part, si $a_1 = \infty$, $f(z)$ se développe en série régulière avec un nombre fini de puissances positives ; elle est donc rationnelle.

On suppose le théorème vrai pour un nombre $\leq q-1$ de pôles et on suppose que $f(z)$ présente q pôles. On choisit un parmi ces pôles, disons a_1, dont sa multiplicité est m_1. Alors si a_1 est un point fini, $g(z) := (z-a_1)^{m_1} f(z)$ présente un nombre $q-1$ de pôles et par l'hypothèse de récurrence, $g(z)$ est rationelle ; de même pour $f(z) = g(z)/(z-a)^{m_1}$. Si $a_1 = \infty$, alors $g(z) := (z-a_1)^{-m_1} f(z)$ est régulière à l'infini et donc présente $q-1$ pôles. Par l'hypothèse de récurrence $g(z)$ est rationnelle ; de même pour $f(z) = g(z)(z-a_1)^{m_1}$. □

Résidus : Soit γ_r un cercle $|z-a| = r$ entourant un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ d'une fonction holomorphe dans $D(a,R) \setminus \{a\}$ avec $r < R$. Alors le *résidu* de f au point a est l'intégrale

$$\mathrm{res}_a(f) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_r} f(z) \mathrm{d}z \,.$$

Le résidu est indépendant du choix de r pour r assez petit.

Théorème 5.7 : Soit U un domaine dont la frontière ∂U est composée d'un nombre fini de courbres continues et soit f holomorphe dans $V \supset \overline{U}$ sauf en un nombre fini de points singuliers isolés $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Alors

$$\int_{\partial U} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_j \mathrm{res}_{a_j}(f) \,.$$

Remarque : Ce théorème ramène le calcul de l'intégrale d'une fonction holomorphe le long de la frontière d'un domaine (quantité globale) à celui des résidus en ses points singuliers (quantités locales). Typiquement, ce type de théorème est très important dans la physique.

Preuve : On construit des petits disques $D(a_j, r_j)$ autour de chaque a_j de telle sorte que chaque disque ne contient que a_j comme point singulier. La fonction $f(z)$ est holomorphe dans $\widetilde{U} := U \setminus \bigcup_j \overline{D(a_j, r_j)}$. Par le Théorème 4.10,

$$0 = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial \widetilde{U}} f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\partial U} - \sum_j \mathrm{res}_{a_j}(f) \,.$$

□

Théorème 5.8 : Le résidu d'une fonction f en un point singulier isolé $a \in \mathbf{C}$ est égal au coefficient a_{-1} de la série de Laurent de f : $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$.

Preuve : La série de Laurent est uniformément convergente sur le cercle $\gamma : |z-a| = r$ pour r assez petit. On prend l'intégrale terme à terme en remarquant que $\int_\gamma \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}$ et que $\int_\gamma \frac{1}{(z-a)^m} \mathrm{d}z = 0$ pour $m \neq 1$. □

Corollaire 5.9 : Le résidu en a d'une fonction holomorphe dans $D(a,R) \setminus \{a\}$ est nul si a est éliminable.

Corollaire 5.10 : (i) Le résidu en un pôle simple $a \in \mathbf{C}$ est donné par

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

(ii) Le résidu en un pôle d'ordre m en $a \in \mathbf{C}$ est donné par

$$\mathrm{res}_a(f) = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(a)$$

où $g(z) := (z-a)^m f(z)$.

Résidu à l'infini : Soit f une fonction dont le point à l'infini est un point singulier isolé. On appelle *résidu de f à l'infini* la quantité

$$\mathrm{res}_\infty(f) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_R^-} f(z) \mathrm{d}z$$

où γ_R^- est un cercle de rayon R assez grand qu'il contient tous les points singuliers finis, parcouru dans le sens rétrograde (donc l'extérieur de ce cercle est un voisinage de $z = \infty$; il est parcouru dans le sens rétrograde afin que l'infini reste à gauche dans le sens du parcours). En posant $z = 1/w$ on obtient le développement en série de Laurent au voisinage du point à l'infini : $f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n$; alors

$$\mathrm{res}_\infty(f) = -c_1 \tag{4}$$

Théorème 5.11 : Soit f holomorphe partout dans $\mathbf{C}$ sauf en un nombre fini de points $\{a_1, \dots a_n\}$. Alors

$$\mathrm{res}_\infty(f) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{res}_{a_j}(f) = 0$$

Preuve : Soit γ_R le cercle $|z| = R$ avec R assez grand qu'il contient tous les points singuliers finis a_j. Par le Théorème 5.7,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_R} f(z) \mathrm{d}z = \sum_j \mathrm{res}_{a_j}(f) \, .$$

La partie gauche ne change pas lorsque R croît (Théorème de Cauchy), donc elle est égal au résidu de f à l'infini pris avec la signe négative (compte tenu du sens de parcours). □

Exemple : Calculer l'intégrale

$$I = \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{(z^8+1)^2} .$$

Il n'est pas nécessaire de calculer les résidus aux huit pôles a_j ($j = 1, \dots, 8$) de la fonction à intégrer, mais juste celui de $z = \infty$ car

$$\sum_{j=1}^{8} \mathrm{res}_{a_j} \frac{1}{(1+z^8)^2} + \mathrm{res}_\infty \frac{1}{(1+z^8)^2} = 0$$

Mais $f = 1/(1+z^8)^2$ présente un zéro d'ordre 16 à l'infini. En effet, si on pose $w = 1/z$, alors

$$f = \frac{1}{(1+z^8)^2} = \frac{w^{16}}{(1+w^8)^2}$$

Il s'ensuit que $c_1 = 0$ et par (4), $\mathrm{res}_\infty(f) = 0$, et par suite $I = 0$.

Exemple : Montrer la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Soit $f(z) = z^2/(1+z^4)$. Les pôles de f sont les 4èmes racines de -1, c'est à dire $e^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Soit

$$a_n = e^{\mathrm{i}\left[\frac{\pi}{4}+(n-1)\frac{\pi}{2}\right]} \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

Alors chaque a_n est un pôle simple de f, donc

$$\mathrm{res}_{a_1}(f) = \lim_{z\to a_1} (z-a_1) f(z) = \frac{{a_1}^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \frac{1-\mathrm{i}}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$$

De la même manière on montre que

$$\mathrm{res}_{a_2}(f) = \frac{1}{4} e^{-\frac{3\pi}{4}\mathrm{i}}$$

Soit $R > 1$ et soit $\gamma = \gamma_R \cup \sigma_R$ le chemin fermé contenant a_1 et a_2 qui est la réunion du demi-cercle $\gamma_R = \{Re^{\mathrm{i}\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ et le segment droit $\sigma_R = \{x \in \mathbf{R} : -R \leq x \leq R\}$. Alors

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \mathrm{res}_{a_1}(f) + \mathrm{res}_{a_2}(f) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}} .$$

D'autre part

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} \mathrm{d}x + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3\mathrm{i}t}}{1+R^4 e^{4\mathrm{i}y}} \mathrm{d}t$$

et par suite

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}R^3 \int_0^\pi \frac{e^{3\mathrm{i}t}}{1+R^4 e^{4\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t$$

Mais $|1 + R^4 e^{4\mathrm{i}t}| \geq R^4 - 1$ et

$$\left| \mathrm{i}R^3 \int_0^\pi \frac{e^{3\mathrm{i}t}}{1 + R^4 e^{4\mathrm{i}t}} \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\pi R^3}{R^4 - 1} \to 0 \quad \text{lorsque } R \to \infty$$

On en déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} \mathrm{d}x = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1 + x^4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

<u>Exemple</u> : Montrer que

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \quad \text{pour } a > 1\,.$$

Pour $z = e^{\mathrm{i}\theta}$, on a $\overline{z} = 1/z$ et donc

$$a + \cos\theta = a + \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = a + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2 + 2az + 1}{2z}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = -\mathrm{i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1}$$

où γ est le cercle $|z| = 1$. Mais $z^2 + 2az + 1 = (z - \alpha)(z - \beta)$ où $\alpha = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ et $\beta = -a - \sqrt{a^2 - 1}$. Puisque $a > 1$, on a $|\alpha| < 1$ et $|\beta| > 1$. Par Théorème 5.7, on a

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z^2 + 2az + 1} = \frac{\pi \mathrm{i}}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

et

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{a + \cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}\,.$$