Variable complexe – Paul Baird

§3. Intégrale complexe

Définition de l'intégrale : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ un chemin de classe C^1 et soit $f(z)$ une fonction complexe définie sur l'image de γ. On appelle *intégrale de f le long du chemin* γ la quantité

$$\int_\gamma f \mathrm{d}z := \int_\alpha^\beta (f \circ \gamma)(t)\, \gamma'(t) \mathrm{d}t\,.$$

Remarque : Cette définition est invariante par changement de paramètre. En effet, si $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbf{C}$ est tel que $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$ où $\tau : [\alpha, \beta] \to [\alpha_1, \beta_1]$ est strictement croissante de classe C^1, alors $\int_\gamma f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z$ par la formule de changement de variable dans un intégrale.

Exemple : Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ le cercle de rayon r : $\gamma(t) = re^{\mathrm{i}t}$ et soit $f(z) = 1/z$. Alors

$$\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}\,.$$

Exercices : 1. Calculer $\int_\gamma z^m \mathrm{d}z$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$ où $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ est le cercle $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$.

2. Soit $a, b \in \mathbf{C}$ et posons $\gamma(t) = tb + (1-t)a$ le segment droit joignant a à b. Calculer $\int_\gamma z^n \mathrm{d}z$.

Propriétés de l'intégrale complexe : 1. Linéarité :

$$\int_\gamma (af + bg) \mathrm{d}z = a \int_\gamma f \mathrm{d}z + b \int_\gamma g \mathrm{d}z \qquad (a, b \in \mathbf{C})$$

2. Additivité : Soient $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbf{C}$ deux chemins C^1 tels que $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$ et soit $\gamma_1 \cup \gamma_2$ leur réunion. Alors

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f \mathrm{d}z$$

3. Orientabilité : On désigne par γ^- le chemin obtenu à partir de $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ par le changement de variable $t \mapsto \alpha + \beta - t$, c'est à dire $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$. On dit que γ^- se déduit de γ par un changement d'orientation. Soit f intégrable le long de γ ; alors

$$\int_{\gamma^-} f \mathrm{d}z = -\int_\gamma f \mathrm{d}z\,.$$

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ un chemin C^1 et écrivons $|\mathrm{d}\gamma| = |\gamma'(t)|\mathrm{d}t$. Alors la longueur $L(\gamma)$ de γ est donnée par

$$L(\gamma) = \int_\gamma |\mathrm{d}\gamma| = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\mathrm{d}t\,.$$

Estimation de l'intégrale :

Théorème 3.1 : Pour toute fonction f intégrable le long d'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ de classe C^1 on a

$$\left|\int_\gamma f\mathrm{d}z\right| \le \int_\gamma |f||\mathrm{d}\gamma|$$

En particulier, si $|f(z)| \le M$ pour tout $z \in \gamma([\alpha, \beta])$ alors

$$\left|\int_\gamma f\mathrm{d}z\right| \le ML(\gamma)\,.$$

Preuve : Soit $J = \int_\gamma f\mathrm{d}z$ et écrire $J = |J|e^{\mathrm{i}\theta}$ pour un nombre θ. Alors

$$|J| = \int_\gamma e^{-\mathrm{i}\theta} f\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta e^{-\mathrm{i}\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

Puisque la partie droite est un nombre réel, on a

$$|J| = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\,\{e^{-\mathrm{i}\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\}\mathrm{d}t \le \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_\gamma |f||\mathrm{d}\gamma|\,.$$

□

L'indice d'un chemin : On dit qu'un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ est fermé si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Théorème 3.2 : Soit γ un chemin fermé C^1 par morceaux et soit Ω le complément de son image dans $\mathbf{C}$. Soit

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z} \qquad (z \in \Omega)$$

Alors Ind_γ est une fonction à valeurs entières sur Ω qui est constante sur chaque composante connexe de Ω est qui est nulle sur la composante non-bornée de Ω.

Preuve : Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{C}$ un chemin fermé et soit $z \in \Omega$:

(1) $$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\mathrm{d}t$$

Alors $\zeta/2\pi\mathrm{i}$ est un entier si et seulement si $e^\zeta = 1$. Il faut démontrer que $\varphi(b) = 1$ où

$$\varphi(s) = \exp\left\{\int_\alpha^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\mathrm{d}t\right\} \qquad (\alpha \le s \le b)$$

Mais

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}$$

en tout point sauf en un nombre fini S où γ n'est pas C^1. Il s'ensuit que $\varphi/(\gamma - z)$ est une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$ dont la dérivée s'annule dans $[\alpha, \beta] \setminus S$, ce qui entraîne que $\varphi/(\gamma - z)$ est constante sur $[\alpha, \beta]$. Puisque $\varphi(a) = 1$ alors

$$\varphi(s) = \frac{\gamma(s) - z}{\gamma(a) - z} \qquad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

Mais γ fermé $\Rightarrow \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ et donc $\varphi(\beta) = 1$ et $Ind_\gamma(z)$ est un entier. Puisque Ind_γ est continue sur chaque composante de Ω, elle est constante sur chaque composante. Enfin (1) implique que $|Ind_\gamma(z)| < 1$ pour z suffisamment grand et par suite Ind_γ est zéro sur la composante non-bornée de Ω. □

Théorème de Taylor-Lagrange pour une fonction holomorphe : On se rappelle de la règle de Leibnitz :

Théorème 3.3 : Soit $\varphi : [a, b] \times [c, d] \to \mathbf{C}$ une fonction continue et définissons $g : [c, d] \to \mathbf{C}$ par

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) \mathrm{d}s.$$

Alors g est continue. En plus, si $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existe et est continue sur $[a, b] \times [c, d]$ alors g est continuement différentiable et

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) \mathrm{d}s$$

Lemme 3.4 :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s} - z} \mathrm{d}s = 2\pi$$

pour tout z avec $|z| < 1$.

Preuve : C'est une conséquence du Théorème 3.2 et l'exemple : $\int_\gamma \frac{1}{z} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}$ où γ est le cercle unité. □

Théorème 3.5 : Soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe sur un ouvert U et supposons que l'adhérence $\overline{D(a, r)} \subset U$ $(D(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\})$. Soit $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{i}t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

pour tout z tel que $|z - a| < r$.

En particulière on en déduit le théorème de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^{2\pi} f(a + re^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t\,.$$

(la valeur de f en a égale à sa moyenne arithmétique le long des cercles assez petits centrés en a).

Preuve : En définissant $U_1 = \{\frac{1}{r}(z-a) : z \in U\}$ et en remplaçant $f(z)$ par $g(z) = f(a+rz)$, on peut supposer que $a = 0$ et $r = 1$, c'est à dire que $\overline{B(0,1)} \subset U$.

Soit z fixé avec $|z| < 1$. Il faut démontrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{\mathrm{i}s})e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s}-z} \mathrm{d}s$$

c'est à dire que

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(\frac{f(e^{\mathrm{i}s})e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s}-z} - f(z) \right) \mathrm{d}s \,.$$

On applique la règle de Leibnitz (Théorème 3.3) en posant

$$\varphi(s,t) = \frac{f((z+t(e^{\mathrm{i}s}-z))e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s}-z} - f(z)$$

pour $0 \le t \le 1$ et $0 \le s \le 2\pi$. Puisque $|z + t(e^{\mathrm{i}s} - z)| = |z(1-t) + te^{\mathrm{i}s}| \le 1$, φ est bien définie et continuement différentiable, d'où la dérivée de $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,t)\mathrm{d}s$ est continue.

Le résultat s'ensuivra si on peut démontrer que $g(1) = 0$. On montre que $g(0) = 0$ est que g est constante. En effet

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s,0)\mathrm{d}s = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{\mathrm{i}s}}{e^{\mathrm{i}s}-z} \mathrm{d}s - 2\pi f(z) = 0$$

par le Lemme 3.4.

En plus, la règle de Leibnitz entrıine que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathrm{d}s$$

où $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{\mathrm{i}s} f'(z+t(e^{\mathrm{i}s}-z))$. D'autre part, pour $0 < t \le 1$ on a $\Phi(s) := -\mathrm{i}f(z+t(e^{\mathrm{i}s}-z))/t$ vérifie $\Phi'(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Donc

$$g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0 \,.$$

Puisque $g'(t)$ est continue on a $g' \equiv 0$ et g est constante. □

Comment appliquer ce résultat afin de trouver une série entière ? On applique la série géométrique : pour $|z-a| < r$ et $|w-a| = r$ on a

$$\frac{1}{w-z} = \left(\frac{1}{w-a}\right) \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{w-a}\right)} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n .$$

Ensuite, on multiplie les deux parties par $f(w)/2\pi\mathrm{i}$ et on prend l'intégrale le long du cercle $\gamma : |z-a| = r$. Par le théorème 3.5, la partie gauche est $f(z)$ et si on est assuré de la convergence uniforme, la partie droite serait

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

où
$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \mathrm{d}w\,.$$
La convergence uniforme est une conséquence du théorème suivant.

Théorème 3.6 : Soit f holomorphe dans $D(a,R)$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout z tel que $|z-a| < R$, où
$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \mathrm{d}w\,.$$

Preuve : Soit $0 < r < R$, d'où $\overline{D(a,r)} \subset D(a,R)$. Soit $\gamma(t) = a + r e^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$. D'après Théorème 3.5,
$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z} \mathrm{d}w$$
pour tout z tel que $|z-a| < r$. Puisque $|z-a| < r$ et $|w-a| = r$
$$\frac{|f(w)|\,|z-a|^n|}{|w-a|^{n+1}} \le \frac{M}{r} \left(\frac{|z-a|}{r} \right)^n$$
où $M = \max\{|f(w)| : |w-a| = r\}$. Puisque $\frac{|z-a|}{r} < 1$, la critère de Weierstrass §Théorème 3, entraîne la convergence uniforme de la série $\sum f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$ pour tout $|w=a| = r$. On en déduit le résultat des calculs précédants. □

Corollaire 3.7 : Soit $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe, alors f est infiniment différentiable.

Corollaire 3.8 : Soit $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe telle que $\overline{D(a,r)} \subset U$, alors
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} \mathrm{d}w\,,$$
où $\gamma(t) = a + r e^{\mathrm{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$.

Corollaire 3.9 (inégalité de Cauchy) : Soit f holomorphe dans $D(a,R)$ et supposons que $|f(z)| \le M$ pour tout z dans $D(a,R)$, alors
$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!M}{R^n}\,.$$

Théorème 3.10 (Théorème de Liouville) : Une fonction holomorphe entière (holomorphe sur tout $\mathbf{C}$) et bornée est toujours constante.

Preuve : Soit $|f(z)| \le M$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. Par le corollaire précédant
$$|f'(z)| \le \frac{M}{R}$$
pour tout R et donc $f'(z) \equiv 0$ pour tout $z \in \mathbf{C}$, d'où f est constante. □

Théorème 3.11 (Théorème fondamental d'algèbre) : Soit $p(z)$ un polynôme non-constant, alors il existe un nombre complexe a tel que $p(a) = 0$.

Preuve : Supposons au contraire que $p(z) \neq 0$ pour tout z et soit $f(z) = 1/p(z)$. Puisque $f(z)$ est bornée et entière, par le Théorème de Liouville, elle est constante, une contradiction. □

Soit $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ holomorphe et soit $a \in U$ un point tel que $f(a) = 0$, alors on dit que *a est un zéro de f de multiplicité $m \geq 1$* s'il existe une fonction holomorphe $g : U \to \mathbf{C}$ tel que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ avec $g(a) \neq 0$.

Corollaire 3.12 : Soit $p(z)$ un polynôme de degré n, alors

$$p(z) = c(z-a_1)^{k_1} \cdots (z-a_m)^{k_m}$$

où c est constante et $k_1 + \cdots + k_m = n$.

Preuve : On applique le Théorème 3.11 et la récurrence. □

Théorème 3.13 : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \to \mathbf{C}$ holomorphe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $F \equiv 0$;

(ii) il existe $a \in U$ tel que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$;

(iii) $\{z \in U : f(z) = 0\}$ présente un point d'accumulation dans U.

Preuve : C'est évident que (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii).
(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Soit $a \in U$ un point d'accumulation de $Z := \{z \in U : f(z) = 0\}$ et supposons que $R > 0$ est tel que $D(a, R) \subset U$. Alors $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-a)^k$ pour $|z-a| < R$. (ii) est une coséquence de l'unicité des séries entières : Théorème 5 de §1.
(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soit $A = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \ \forall n \geq 0\}$. Par hypothèse $A \neq \emptyset$. On montre que A est à la fois ouvert et fermé dans U.

Soit $z \in \overline{A} \cap U$ et soit (z_k) une suite dans A telle que $z = \lim z_k$. Puisque chaque $f^{(n)}$ est continue on voit que $f^{(n)}(z) = \lim f^{(n)}(z_k) = 0$, donc $z \in A$ et $A \cap U = \overline{A} \cap U$. D'autre part soit $a \in A$ et soit $R > 0$ tel que $D(a, R) \subset U$. Alors $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$ pour $|z-a| < R$ où $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$. Donc $f(z) = 0$ pour tout z dans $D(a, R)$ et $D(a, R) \subset A$ et par suite A est ouvert. □

Théorème 3.14 (Principe du maximum) : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert connexe et soit $f : U \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle qu'il existe un point $a \in U$ tel que $|f(a)| \geq |f(z)|$ pour tout $z \in U$. Alors f est constante.

<u>Preuve</u> : Soit $r > 0$ tel que $\overline{D(a,r)} \subset U$ et soir $\gamma(t) = a + re^{\mathrm{i}t},\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Théorème 3.5 entraîne que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-a}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2pi} f(a + re^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$$

Puisque $|f(a + re^{\mathrm{i}t})| \leq |f(a)|$ pour tout t, il s'ensuit que

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{\mathrm{i}t})|\mathrm{d}t \leq |f(a)|$$

Donc

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(a)| - (f(a + re^{\mathrm{i}t})|)\mathrm{d}t$$

et $|f(a)| = |f(a + re^{\mathrm{i}t})|$. Puisque r est quelconque, on voit que pour $D(a,R) \subset U$, on a $f(D(a,R)) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| = |\alpha|\}$ où $\alpha = f(a)$, ce qui entraîne f constante dans $D(a,R)$ ($f\overline{f} = c \Rightarrow \overline{f}\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ dans $D(a,R)$). En particulière $f(z) = \alpha$ pour $|z - a| < R$. Pour conclure, on applique le théorème 3.13 à la fonction $f(z) - \alpha$. $\square$