

Variable complexe – Paul Baird

§2. Fonctions holomorphes

C-différentiabilité : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est dite différentiable au sens complexe, **C-différentiable** ou encore dérivable, en un point $a \in U$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe ($h \in \mathbf{C}$). La limite s'appelle la dérivée de f en a et s'écrit $f'(a)$, ou $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Théorème 2.1: La fonction f est **C-différentiable** en a si et seulement si il existe une fonction $p : U \rightarrow \mathbf{C}$ continue en a telle que

$$f(z) = f(a) + (z - a)p(z).$$

On a alors $f'(a) = p(a)$.

Exemples : (i) $f(z) = z^n$ ($n \geq 1$) est dérivable en chaque point de \mathbf{C} et $f'(a) = na^{n-1}$

(ii) $f(z) = \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point de \mathbf{C} , pourtant $F : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (x, -y)$ est **R-dérivable**.

Les équations de Cauchy-Riemann : Soit $U \subset \mathbf{R}^2$ un ouvert. Une fonction $u : U \rightarrow \mathbf{R}$ est **R-différentiable** en $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ si les dérivées partielles existent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial y}(a, b) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(a, b+k) - u(a, b)}{k} \end{aligned}$$

Si en plus, ces dérivées existent dans un voisinage de (a, b) et sont continue en (a, b) , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des nombres réels λ et μ et $\delta > 0$, tels que pour $h, k \in \mathbf{R}$ avec $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ on a

$$(1) \quad |u(a+h, b+k) - u(a, b) - (\lambda h + \mu k)| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}.$$

où $\lambda = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$ et $\mu = \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$. Une fonction $F : U \rightarrow \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ est **R-différentiable** si et seulement si u et v sont **R-différentiable**.

Théorème 2.2 : Soit $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ ($U \subset \mathbf{C}$ ouvert). Soit $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ et $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Alors f est **C-différentiable** en $a + ib \in U$ si et seulement si

(i) u et v sont **R-différentiable** en (a, b) et vérifient (1) ; et

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a, b)$.

Dans ce cas $f'(a + ib) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) + i \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) - i \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$.

²Preuve : Soit $f'(a + ib) = \lambda + i\mu$. Alors quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $h, k \in \mathbf{R}$, $|h + ik| < \delta$ entraîne

$$|f(a + h + i(b + k)) - f(a + ib) - (\lambda + i\mu)(h + ik)| \leq \varepsilon|h + ik| = \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2},$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} |u(a + h, b + k) - u(a, b) - (\lambda h - \mu k)| &\leq \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2} \\ (2) \quad |v(a + h, b + k) - v(a, b) - (\mu h + \lambda k)| &\leq \varepsilon\sqrt{h^2 + k^2} \end{aligned}$$

Donc u, v sont \mathbf{R} -différentiable en (a, b) et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \frac{\partial v}{\partial y}(a, b) = \lambda \\ -\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) &= \frac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \mu \end{aligned}$$

Reciproquement, supposons (i) et (ii) et écrivons

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a, b), \quad \mu = -\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial v}{\partial x}(a, b).$$

Alors $\forall \varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que les inégalités (2) sont vérifiées pour tout $h, k \in \mathbf{R}$ avec $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$. Dans ce cas

$$|f(a + h + i(b + k)) - f(a + ib) - (\lambda + i\mu)(h + ik)| \leq 2\varepsilon|h + ik| = 2\varepsilon\sqrt{h^2 + k^2},$$

ce qui montre que $f'(a + ib)$ existe et égale $\lambda + i\mu$. □

Les équation (ii) s'appellent les équations de Cauchy-Riemann.

Exercice : Trouver les points de \mathbf{C} où $f(x + iy) = x^2 + iy^2$ est \mathbf{C} -différentiable.

Notation : On introduit les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right)$$

Donc si f est \mathbf{C} -différentiable $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = f'$. En plus

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) = 0$$

si et seulement si les équation de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

Théorème 2.3 : f est \mathbf{C} -différentiable en un point a si et seulement si f est \mathbf{R} -différentiable en ce point et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. Dans ce cas $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Fonctions holomorphes : Une fonction f est *holomorphe* en un point $a \in \mathbf{C}$ si elle est \mathbf{C} -différentiable dans un voisinage de a , c'est à dire $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ dans un voisinage de a . On dit que f est *anti-holomorphe* en a si $\partial f / \partial z = 0$ dans un voisinage de a .

Exemple : La fonction $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ est \mathbf{R} -différentiable en tout point de \mathbf{C} . Or $\partial f / \partial \bar{z} = z$ est nulle que au point $z = 0$, donc f n'est nulle part holomorphe.

Si f est dérivable dans u alors $f'(z)$ définit une fonction $f' : U \rightarrow \mathbf{C}$. Si f' est continue on dit que f est continuellement différentiable. Si f' est dérivable alors f est deux fois dérivable... etc. Si chaque dérivée complexe existant et est continue on dit que f est infiniment différentiable.

Chaque fonction f qui s'exprime comme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dans un voisinage de $a \in \mathbf{C}$ est dite *analytique* en a . Fait remarquable : chaque fonction holomorphe en a est infiniment différentiable en a et en plus elle est analytique en a .

Une fonction f est holomorphe en $\infty \in \mathbf{C}_{\infty}$ si la fonction $g(z) = f(1/z)$ est holomorphe au point $z = 0$. Par exemple, la fonction $f(z) = 1/z^2$ est holomorphe à l'infini puisque $g(z) = z^2$ l'en est au point $z = 0$.

Applications conformes : Soit $F : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ (U ouvert), $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, et soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors la dérivée de F est l'application $F_* = F_*(x_0, y_0) : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ donnée par

$$F_*(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

où les dérivées partielles sont calculées en (x_0, y_0) . Une telle application est dite conforme si sa dérivée existe, est non-nulle et continue et conserve les angles.

Exercices : 1. Soit $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs canoniques ; donc $F_*e_1 = (u_x, v_x)$ etc. Montrer que F_* conserve les angles si et seulement si

- (i) $F_*e_1 \cdot F_*e_2 = 0$; et
- (ii) $\|F_*e_1\| = \|F_*e_2\|$ en chaque point.

2. Montrer que $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ est conforme si et seulement si soit $\partial f / \partial z \neq 0$ soit $\partial f / \partial \bar{z} \neq 0$ en chaque point et f est holomorphe ou anti-holomorphe.

Si f est conforme sauf à des points isolés où sa dérivée s'annule on dit que f est faiblement conforme.

Fonctions homographiques : $w = (az + b)/(cz + d)$, $ad - bc \neq 0$, où a, b, c, d sont des nombres complexes fixés définies à un multiple près. La condition $ad - bc \neq 0$ exclut le

cas constant (le numérateur est proportionnel au dénominateur). On prolonge w dans la sphère de Riemann en posant

$$\begin{aligned} w &= \infty \quad \text{pour } z = -d/c \\ w &= a/c \quad \text{pour } z = \infty \end{aligned}$$

(si $c = 0$ on pose $w = \infty$ pour $z = \infty$).

Théorème 2.4 : Toute fonction homographique réalise un homéomorphisme de \mathbf{C}_∞ dans \mathbf{C}_∞ .

Preuve :

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow z = \frac{dw - b}{a - cw}$$

et par suite $w : \mathbf{C}_\infty \rightarrow \mathbf{C}_\infty$ possède un réciproque (qui se prolonge aux points $z = \infty, -d/c$) ce qui montre qu'elle est bijective. La continuité de w est partout évidente sauf aux points $z = -d/c, \infty$; mais elle en résulte aussi en ces points car

$$\lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}.$$

□

Exercices : 1. Toute fonction homographique est la composée des applications suivantes:

- $z \mapsto z + c$: translation ;
- $z \mapsto 1/z$: inversion ;
- $z \mapsto be^{i\theta}z$: similitude (rotation et dilatation).

2. Une application homographique est déterminée par son effet sur trois points distincts de \mathbf{C}_∞ .

La fonction exponentielle : Trois définitions équivalentes :

$$e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \quad e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

La fonction exponentielle est \mathbf{C} -différentiable partout et vérifie les propriétés suivantes:

- (i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;
- (ii) $e^{z+2\pi i} = e^ze^{2\pi i} = e^z$;
- (iii) $\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z$.

Exercice : Est-ce-que $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ existe ?

A partir de la fonction exponentielle on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (\cos z)' &= -\sin z, & (\sin z)' &= \cos z, & \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, & \cos z &= \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \\ \cos(x + iy) &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, & & & & & \text{etc.} \end{aligned}$$

et que

$$\cosh z = \cos iz, \quad \sinh z = -i \sin iz, \quad \cos z = \cosh iz, \quad \sin z = -i \sinh iz$$

Différentiation des séries entières :

Théorème 2.5 : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ pour $|z-a| < R$, où $R > 0$. Alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-a)^{n-1}$ pour $|z-a| < R$. En particulier f est holomorphe dans le disque $|z-a| < R$.

On omet la preuve qui est comme celle pour les séries entières réelles.

On posant $z = a$ on en déduit que $f'(a) = a_1$, et par récurrence que $f^{(n)}(a) = n! a_n$.

La fonction logarithme : Dans quel sens peut-on choisir l'argument d'un nombre complexe d'une manière continue ? Ce n'est pas possible dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$ on définit la demi-droite $L_\alpha = \{-re^{i\alpha} : r \geq 0\}$. On se rappelle qu'un ensemble $U \subset \mathbf{C}$ est étoilé autour du point $a \in U$ si pour chaque $z \in U$, le segment droit joignant a à z est contenue dans U . Alors $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$ est ouvert et étoilé autour de $e^{i\alpha}$.

Pour $z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha$ on définit $\arg_\alpha(z)$ comme l'argument unique de z dans l'intervalle $(\alpha - \pi, \alpha + \pi)$.

Théorème 2.6 : La fonction \arg_α est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$. Si θ est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$ telle que pour chaque z , $\theta(z)$ est un argument de z , alors il existe un entier k tel que $\theta(z) = \arg_\alpha(z) + 2k\pi$ pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha$.

On dit qu'un nombre complexe w vérifiant $e^w = z$ est un logarithme de z . Alors chaque nombre z réel et positif possède un logarithme unique $\ln x$. C'est claire que les logarithmes de z sont les nombres $\ln|z| + it$ où t est un argument de z .

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On définit

$$\ln_\alpha(z) = \ln|z| + i \arg_\alpha(z), \quad z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha.$$

⁶ Par le théorème 2.6, \ln_α est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$, et il est la fonction réciproque de \exp sur

$$\{x + iy : \alpha - \pi < y < \alpha + \pi\}$$

donc, d'après la loi pour la dérivée de la fonction réciproque on en déduit que

$$(\ln_\alpha)'(z) = \frac{1}{z}$$

dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$.

Exercice : Montrer que dans le disque $|z| < 1$, on a

$$\ln_0(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$