Variable complexe – Paul Baird

§1. Notions de base

L'ensemble des nombres complexes est le plan $\mathbf{C} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\}$ avec les opérations d'addition et de multiplication :

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &= (x_1+x_2, y_1+y_2)\\ (x_1,y_1)(x_2,y_2) &= (x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}$$

Il s'agit d'un corps commutatif engendré par les réels $\mathbf{R} \hookrightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto (x,0)$ et l'élément $\mathrm{i} := (0,1)$. Tout élément s'écrit alors comme $x+y\mathrm{i}$ avec la propriété $\mathrm{i}^2 = -1$.

Si on abandonne commutativité de multiplication on peut définir les quaternions $\mathbb{H}$:

$$x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j} + t\mathrm{k} \qquad \mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1,\ \mathrm{ij} = \mathrm{k}$$

Si on abandonne l'associativité de multiplication on est ramené aux octonions de Cayley $\mathbb{O}$. $\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ sont tous les algèbres de division (tout élément non-nul est inversible). Parmi ces quatres algèbres ce n'est que $\mathbf{C}$ qui est algébriquement fermé (tout élément algébrique, c'est à dire qui est racine d'un polynome, appartient à $\mathbf{C}$).

Notations : $z = x + y\mathrm{i}$,

- x est la partie réelle de z : $x = \mathrm{Re}\, z$;
- y est la partie imaginaire de z : $y = \mathrm{Im}\, z$;
- $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est la module de z ;
- $\overline{z} = x - y\mathrm{i}$ est la conjuguée de z : $|z|^2 = z\overline{z}$;
- l'inverse de z est donnée par $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$.

On identifie $z \in \mathbf{C}$ avec le point $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)$ dans la plan $\mathbf{R}^2$.

Forme polaire : On écrit $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, puis $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ où $r = |z|$ est la module de z. On appelle θ l'argument de z. Si $z_1 = r_1e^{\mathrm{i}\theta_1}, z_2 = r_2e^{\mathrm{i}\theta_1}$ alors

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2}, \quad z^n = r^ne^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

<u>Racine n–ième de a</u> : Les solutions de l'équation $z^n = a = |a|e^{\mathrm{i}\alpha} \in \mathbf{C}$ sont données par

$$z = |a|^{1/n}e^{\mathrm{i}(\alpha+2k\pi)/n} \qquad 0 \le k \le n-1\,.$$

Séries entières : Soit $\{a_n\}$ une suite dans $\mathbf{C}$ telle que $S_n := a_0 + \cdots + a_n \to S$ lorsque $n \to \infty$. Alors on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge avec limite S. On écrit

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Si $\sum |a_n|$ converge on dit que $\sum a_n$ est absolument convergente.

<u>Théorème 1</u> : Soient $\{a_n\}, \{b_n\}$ suites telles que $\sum a_n = A$ et $\sum b_n = B$ avec $\sum |a_n|$ convergente. Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

<u>Convergence ponctuelle</u> : Soit $U \subset \mathbf{C}$ et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions $f_n : U \to \mathbf{C}$. La suite $\{f_n\}$ converge ponctuellement en $a \in U$ s'il exite un nombre qu'on note $f(a) \in \mathbf{C}$ tel que $f_n(a) \to f(a)$. Si $\{f_n\}$ converge ponctuellement en chaque point de U et chaque f_n est continue, ce n'est pas nécessairement le cas que la fonction limite f est continue. Voir, par exemple, le cas où $U = [-1, 1]$ et $f_n(x) = x^{2n}$.

<u>Convergence uniforme</u> : On dit que f_n converge uniformément vers f sur U si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $|f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$ pour tout $a \in U$.

<u>Théorème 2</u> : Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions continues définies sur $U \subset \mathbf{C}$ qui convergent uniformément vers $f : U \to \mathbf{C}$. Alors f est continue.

<u>Convergence uniforme d'une série</u> : On dit que la série des fonctions $\sum_n f_n$ converge uniformément dans $U \subset \mathbf{C}$ si la suite des sommes partielles : $S_n = f_1 + \cdots + f_n$ converge uniformément.

<u>Théorème 3</u> (critère de convergence de Weierstrass) : Soit $\{M_n\}$ une suite de nombres réels non-négatifs telle que $\sum_n M_n$ converge et soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions définies sur $U \subset \mathbf{C}$ telle que pour chaque n on a $|f_n(z)| \leq M_n$ pour tout $z \in U$. Alors $\sum_n f_n$ converge uniformément dans U.

<u>Preuve</u> : Pour chaque $z \in U$, $\sum_n f_n(z)$ converge puisqu'elle converge absolument. Soit $S(z) = \sum_n f_n(z)$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\displaystyle\sum_{N+1}^{\infty} M_n < \varepsilon$. Pour $z \in U$, $m \geq N$,

$$\left| \sum_{n=N+1}^{m} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{m} M_n \leq \varepsilon \,.$$

Lorsque $m \to \infty$, on a

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z) \right| = \left| S(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z) \right| \leq \varepsilon \,.$$

$\square$

Une conséquence du théorème précédante est la caractérisation de convergence des séries entières :

<u>Théorème 4</u> : Soit $\{a_n\}$ une suite de nombres complexes. Alors

soit (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbf{C}$;

soit (ii) il existe $R \geq 0$ tel que $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge pour $|z| > R$.

Si $0 \leq r < R$ (ou si $r > 0$ dans le cas (i)) alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformément dans le disque $\{z \in \mathbf{C} | |z| \leq r\}$.

Le nombre R s'appelle le rayon de convergence de la série entière.

Corollaire 1 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ convergentes pour $|z| < R$ avec sommes $a(z)$ et $b(z)$ respectivement. Soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = a(z)b(z)$ pour $|z| < R$.

Corollaire 2 : Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge à $S(z)$ pour $|z| < R$, alors S est continue dans le disque $|z| < R$.

Exemples : (i) $\sum z^n$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| \geq 1$. Donc $R = 1$ et la série est divergente poiur tout z tel que $|z| = R$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $z = 1$ donc $R = 1$. La série converge lorsque $z = -1$.

(iii) $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbf{C}$; de même pour $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$.

Théorème 5 (théorème d'unicité des séries entières) : Soient $\sum_n a_n z^n = a(z)$ et $\sum_n b_n z^n = b(z)$ pour $|z| < R$, $R > 0$. Soit $\{z_k\}$ une suite de nombre complexes non-nuls telle que $z_k \to 0$ lorsque $k \to \infty$ et $a(z_k) = b(z_k)$ pour chaque k. Alors $a_n = b_n$ pour tout n.

Preuve : Puisque $a(z)$ et $b(z)$ sont continues en $z = 0$, on a

$$\lim_{k \to \infty} a(z_k) = a_0, \quad \lim_{k \to \infty} b(z_k) = b_0$$

donc $a_0 = b_0$. Supposons qu'on a établi que $a_r = b_r,\ r = 0, 1, \ldots m$. Soient

$$a^*(z) = a_{m+1} + a_{m+2} z + \cdots, \quad b^*(z) = b_{m+1} + b_{m+2} z + \cdots$$

alors $a^*(z_k) = b^*(z_k)$ pour chaque k , donc, lorsque $k \to \infty$ on en déduit que $a_{m+1} = b_{m+1}$. Par récurrence, on a $a_n = b_n$ pour tout n $\square$

Chemins : Un chemin est une application continue $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Deux chemins $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{C}$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{C}$ sont équivalents s'il existe une fonction continue strictement croissante $\tau : [a_1, b_1] \to [a_2, b_2]$ telle que $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$ pour tout $t \in [a_1, b_1]$. Il s'agit d'une relation d'équivalence. Une courbe est une classe d'équivalence de chemins.

Réunion de deux chemins : Soient $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ et $\delta : [c,d] \to \mathbf{C}$ deux chemins tels que $\gamma(b) = \delta(c)$. Soit $\delta_1(t) = \delta(t+c-b),\ b \le t \le b+d-c$. Alors δ_1 est équivalent à delta. En plus, la fonction qui est confondue avec γ sur $[a.b]$ et δ_1 sur $[b, b+d-v]$ est continue dans $[a, b+d-c]$ et détermine un chemin noté $\gamma \cup \delta$.

Chemin continuement différentiable : Un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ est dit coninuement différnetiable, ou de classe C^1, si $\gamma(t)$ admet une dérivée $\gamma'(t)$ qui est continue en chaque point $t \in [a,b]$. Si en plus $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$ on dit que γ est régulière.

Un chemin γ est continuement différentiable par morceaux si $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ avec chaque γ_j continuement différentiable.

Longueur d'un chemin : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ un chemin et soit $S : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. Soit

$$L(\gamma, S) := \sum_{j=1}^{n} |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| \,.$$

Par l'inégalité triangulaire, $L(\gamma, S') \ge L(\gamma, S)$ lorsque $S' \supseteq S$. On dit que γ est <u>rectifiable</u> si $\{L(\gamma, S) | S \text{ une subdivision de } [a,b]\}$ est majoré. La borne supérieure est la longueur de γ notée $|\gamma|$.

<u>Exercices</u> : (i) soit $\gamma(t) = tz + (1-t)w$, $(t \in [0,1], z, w \in \mathbf{C})$. Montrer que $|\gamma| = |w - z|$.

(ii) Montrer que $|\gamma \cup \delta| = |\gamma| + |\delta|$.

<u>Théorème</u> : Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ continuement différentiable régulière, alors

$$|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

<u>Preuve</u> : Soit S une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) \mathrm{d}t = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})\,,$$

donc

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) \mathrm{d}t \right| \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| \mathrm{d}t.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque γ' est uniformément continue dans $[a,b]$, il existe $\delta > 0$ tel que $s, t \in [a,b]$, $|s-t| < \delta \;\Rightarrow\; |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$. Soit $S : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$

une subdivision de $[a,b]$ tel que $t_j - t_{j-1} \leq \delta$ pour chaque j. Posons $\gamma(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$. Pour chaque j, il existe $p_j, q_j \in (t_{j-1}, t_j)$ tels que

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})(u'(p_j) + \mathrm{i}v'(q_j))$$

(formule des accroisements finis). Soit $\psi(t) = u'(p_j) + \mathrm{i}v'(q_j)$ pour $t_{j-1} \leq t < t_j$. Alors ψ est constante sur chaque $[t_{j-1}, t_j]$ et

$$|\psi(t) - \gamma'(t)| = (u'(p_j) + \mathrm{i}v'(q_j) - u'(t) - \mathrm{i}v'(t)| \leq 2\varepsilon$$

pour tout t. Donc

$$\begin{aligned} &\int_a^b (|\gamma'(t)| - |\psi(t)|)\mathrm{d}t \leq 2\varepsilon(b-a) \\ \Rightarrow \quad &|\gamma| \geq L(\psi, S) = \int_a^b |\psi(t)|\mathrm{d}t \geq \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t - 2\varepsilon(b-a)\,, \end{aligned}$$

et $|\gamma| \geq \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t\,.$ □

Plan compactifié : On ajoute un point à l'infini $z = \infty$. On écrit $\mathbf{C} \cup \{\infty\} = \mathbf{C}_\infty$. On réalise $\mathbf{C}_\infty$ comme la sphère unité dans $\mathbf{R}^3$: $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1\}$ (appelé sphère de Riemann). A chaque point $z \in \mathbf{C}$ on associe le point $X = (x_1, x_2, x_3)$ d'intersection de S^2 avec le rayon joignant le pôle nord $N = (0,0,1)$ au point z. La correspondance $X \leftrightarrow z$ s'appelle la projection stéreographique. Le point $N \leftrightarrow \infty$.

Soit $z = x + \mathrm{i}y$. Le rayon est paramétré comme $\{t(0,0,1) + (1-t)(x,y,0) | 0 \leq t \leq 1\}$. Le point d'intersection avec la sphère est donnée par $t = (|z|^2 - 1)/|z|^2 + 1)$ d'où

$$(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{|z|^2 + 1}(2\mathrm{Re}\, z, 2\mathrm{Im}\, z, |z|^2 - 1)\,.$$

Reciproquement, $z = x + \mathrm{i}y = (x_1 + \mathrm{i}x_2)/(1 - x_3)$.

Soit $f(z)$ une fonction d'une variable complexe telle que $|f(z)| \to \infty$ lorsque $z \to a \in \mathbf{C}$. Alors on associe la valeur ∞ à $f(z)$ lorsque $z = a$. Reciproquement, si $f(z) \to b$ lorsque $|z| \to \infty$ on écrit $f(\infty) = b$. Par exemple, soit $f(z) = 1/z$, alors $f(0) = \infty$ et $f(\infty) = 0$.

Référence : W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson 1992.