Variable complexe – Paul Baird

§6. Remarques complémentaires et corrections

1. Théorème 6.4 (Rouché) : Clairement les zéros et les pôles de g et $-g$ coincident, donc dans les hypthèses de ce théorème on peut remplacer g par $-g$ et écrire

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

Si maintenant on remplace g par $f + g$, on conclut que si

$$|g(z)| < |f(z)| + |f(z) + g(z)| \Leftrightarrow |g(z)| - |f(z)| < |f(z) + g(z)|$$

pour tout $z \in \gamma$, alors $Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g}$ (les autres hypothèses restent inchangées). On remarque alors que si $|g(z)| < |f(z)|$ pour tout $z \in \gamma$, alors $|g(z)| - |f(z)| < 0 \leq |f(z) + g(z)|$ et donc l'hypothèse est satisfaite. ON peut alors affirmer :

<u>Corollaire</u> : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert simplement connexe, soit f et g deux fonctions méromorphes sur U avec un ensemble fini F de zéros et de pôles. Soit γ un chemin fermé simple (injectif) à image dans $U \setminus F$ formant le bord d'un compact K. Si pour tout $z \in \gamma$ (c'est à dire dans l'image de γ) on a

$$|g(z)| < |f(z)|$$

alors $Z_f - P_f = Z_{f+g} - P_{f+g}$ où Z_f (P_f) sont le nombre de zéros (pôles) de f (en tenant compte de leur multiplicité) contenus dans K.

<u>Application</u> : Soit $p(z) = a_n z^n + q(z)$ un polynôme de degré n avec $\deg q(z) < n$. On peut alors comparer les zéros de z^n et $p(z)$ car pour $|z|$ assez grand on a $|q(z)| < |a_n z^n|$.

<u>Exercice</u> : Montrer que le polynôme $z^4 + 26z + 2$ présente exactement trois zéros dans la coronne $5/2 < |z| < 3$.

2. Dans la feuille d'exercices no 6 (à noter qu'on haut de la page est marqué §5 plutôt que §6), question 5 : le chemin γ est fermé.