M1 Variable Complexe – écrit – 11 mai 2016 : solutions

I On applique la formule intégrale :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,2)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz \quad \text{pour } |x| < 2$$

et f holomorphe. En effet

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{\pi i - 2z}\,dz = -\frac{1}{2}\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-\frac{\pi i}{2}}\,dz$$

On remarque que $\left|\frac{\pi i}{2}\right| < 2$. Soit $f(z) = e^z$. Alors

$$-\frac{1}{2}\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-\frac{\pi i}{2}}\,dz = -\frac{1}{2}\times 2\pi i\, e^{\pi i/2} = -\pi i \times i = \pi.$$

II On applique le théorème de Rouché :

Soit $f(z) = z^4$ et $g(z) = 12z + 1$.

Sur le cercle $|z| = 3$, on a

$$|12z+1| \leq 12|z| + 1 = 37 < |z|^4 = 3 \times 27 = 81$$

Donc, par le théorème de Rouché, le nombre de racines de $f(z) = z^4$ et de $f(z) + g(z) = z^4 + 12z + 1$ dans le cercle coïncident ; c'est à dire 4.

D'autre part, sur le cercle $|z| = 2$:

$$|g(z)| = |12z+1| \geq 12|z| - 1 = 23 > |z|^4 = 16$$

et par suite, le nombre de racines de $g(z)$ et de $g(z) + f(z)$ dans le cercle coïncident : mais $g(z)$ présente une racine $z = -\frac{1}{12}$ dans ce cercle.

Il s'ensuit qu'exactement trois racines sont dans la couronne $2 < |z| < 3$.

III On applique les équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 - 2y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 2x = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

De l'équation (1) : $v = 3x^2y - y^3 - y^2 + \alpha(x)$ où α ne dépend que de x.
Puis $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \alpha'(x)$.

De l'équation (2) on en déduit que $\alpha'(x) = 2x$ et $\alpha(x) = x^2 + C$ avec C constante. (qu'on prend égale à 0)

Il suffit de prendre $v(x+iy) = 3x^2y - y^3 - y^2 + x^2$

Avec ce choix $u + iv = x^3 - 3xy^2 - 2xy + i(3x^2y - y^3 - y^2 + x^2)$

$$= z^3 + iz^2 \quad \text{où } z = x+iy.$$

(c) $\forall z \in \gamma([0,1])$, $0 \leq t < u \leq 1$

$$(*)\quad \left|\frac{(f'+ug')(z)}{(f+ug)(z)} - \frac{(f'+tg')(z)}{(f+tg)(z)}\right| = \left|\frac{(f'+ug')(f+tg) - (f'+tg')(f+ug)}{(f+ug)(f+tg)}\right|$$

(en supprimant z dans l'écriture)

$$= \left|\frac{t(f'g - g'f) + u(g'f - f'g)}{(f+ug)(f+tg)}\right| = \frac{(u-t)\,|f'g - fg'|}{|f+ug|\,|f+tg|}$$

Mais $|f+ug| \geq |f| - u|g| \geq |f| - |g| \geq \delta$ (sur $\gamma([0,1])$)

De même $|f+tg| \geq \delta$ et

$$(*) \leq \frac{u-t}{\delta^2}\,|(f'g - fg')(z)|$$

Il s'ensuit que

$$|E(u) - E(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma (*)\,|dz|$$

$$\leq \frac{L(\gamma)}{2\pi} \max_{z\in\gamma([0,1])} |(f'g - fg')(z)| \cdot \frac{(u-t)}{\delta^2}$$

$= k(u-t)$ où k est une constante indépendante de t et u.

(d) Soit n tel que $\cancel{\frac{1}{n} \leq k}$ $n > k$. On divise l'intervalle $[0,1]$ dans la subdivision $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \dots < \frac{n-1}{n} < 1$

Soit $t = 0$ et $u = 1/n$ alors $|E(u) - E(t)| \leq \frac{k}{n} < 1$

Puisque $E(\frac{1}{n})$ et $E(0)$ sont entiers, alors $E(\frac{1}{n}) = E(0)$.

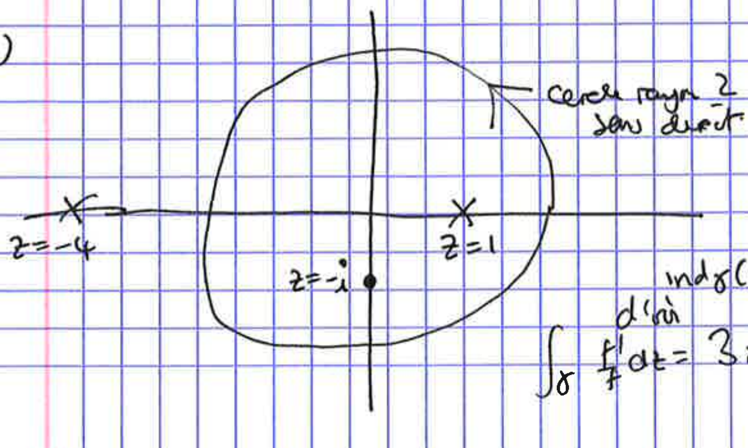
De même $E(\frac{2}{n}) = E(\frac{1}{n}) = E(0)$ etc

jusqu'à $E(1) = E(0)$.

Puisque $E(1) = Z-P(f+g, \gamma)$ et $E(0) = Z-P(f, \gamma)$.

On en déduit que $Z-P(f+g, \gamma) = Z-P(f, \gamma)$.

(e)



$f(z) = (z-1)^3 (z+4)(z+i)^{-2}$ présente un zéro d'ordre 3 en $z = 0$ ($\mathrm{ord}(f,1) = 3$)

pôle d'ordre 2 en $z = -i$ ($\mathrm{ord}(f,-i) = -2$)

et un zéro simple en $z = -4$.

$\mathrm{ind}_\gamma(1) = 1$, $\mathrm{ind}_\gamma(-i) = 1$, $\mathrm{ind}_\gamma(-4) = 0$

d'où

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = 3\times 1 - 2\times 1 + 1\times 0 = 1$$

IV (a) On remarque que pour $z \neq 0$, $f = z^{1/4}$ a quatre racines. Il faut choisir la bonne !

Tout $z \in U$ s'écrit $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$. On définit

$$f(z) = r^{1/4} e^{i\theta/4} \quad \text{sur } U.$$

Alors $1 = r e^{i0}$ et $f(r) = 1$. La fonction f ainsi définie est holomorphe car elle est $\mathbb{C}$-différentiable :

$$f'(z) = \frac{1}{4} z^{-3/4} \quad \cancel{\text{avec } z = re^{i\theta}}$$

$$= \frac{1}{4} f(z)^{-3} \quad \text{avec } f(z) = r^{1/4} e^{i\theta/4}.$$

L'image de f est l'ensemble : $\tilde{V} = \{ z = r e^{i\theta} \mid r > 0, -\frac{\pi}{4} < \theta < \pi/4 \}$

(b) On voit que V se déduit de $\tilde{V}$ par une rotation de $\pi/4$, c'est à dire en composant f avec $w \mapsto e^{i\pi/4} w$ (aussi holomorphe)

Donc $z \mapsto e^{i\pi/4} f(z)$ définit une application holomorphe de U dans V. Elle est bijective car inversible. Son inverse est donnée par

$$w \mapsto e^{-i\pi/4} w \longrightarrow (e^{-i\pi/4} w)^4 = e^{-i\pi} w^4 = -w^4.$$

(c) Puisque $\ln_0$ est bien défini et holomorphe dans U et l'application $z \mapsto -z^4$ donne une bijection holomorphe de V dans U, il s'ensuit que

$$g(z) = \ln_0(-z^4)$$

est bien définie et holomorphe dans V.

Image de e^{it}, $0 < t < \pi/2$: $\ln_0(-e^{-i4t}) = \ln_0(e^{i\pi} e^{i4t}) = \ln_0(e^{i(\pi+4t)}) = i\arg_0(e^{i(\pi+4t)})$ = $\boxed{\text{Image } i\,]-\pi,\pi[}$

V (a) La fonction $|f(z)| - |g(z)|$ étant continue et > 0 sur l'ensemble compact $\gamma([0,1])$, elle présente un ~~minim~~ et atteint son minimum $\delta > 0$

(b) L'ensemble des pôles de $f(z) + t g(z)$ est constitué des pôles de f et les pôles de g, dont aucun dans $\gamma([0,1])$.

Alors $f(z) + t g(z) = 0 \implies f(z) = -t\, g(z)$
$\implies |f(z)| = t\, |g(z)|$
— impossible si $|g(z)| < |f(z)|$ et $0 < t < 1$

Par suite, il n'y a aucun zéro dans $\gamma([0,1])$.

Il s'ensuit que $E(t)$ est bien définie et puis que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{ord}(h, z_j) \operatorname{ind}(\gamma, z_j) \in \mathbb{Z}$$

pour une fonction $h(z)$ méromorphe ne présentant aucun zéro ou pôle dans $\gamma([0,1])$, il s'ensuit que $E(t)$ est entier.