Variable Complexe: Feuilles d'exercices – solutions (sélection)

§1 3 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout z

$\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$ ne converge que pour $z=0$

(test d'Alembert)

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = S(z) \quad \forall z : |z| < R$

• $S(x)$ réelle $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < R$

$\Leftrightarrow S(x) = \overline{S(x)} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} x^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - \overline{a_n}) x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < R$

$\Rightarrow a_n = \overline{a_n} \quad \forall n$ (par l'unicité d'une série entière)

• $S(z)$ paire $\Leftrightarrow S(z) = S(-z) \quad \forall z : |z| < R$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n z^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (-1)^n a_n) z^n = 0$

$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = 0 \quad \forall z : |z| < R \Rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad \forall k$

(iii) $S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = 1 + z + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}$ ne converge pas uniformément.

En effet, soit $z = x$ réelle ; $x < 1$ $\quad \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \to \infty$ lorsque $x \to 1$ et $N \to \infty$

(iv) Pour $|z| < 1$: $\quad \sum_{n \geq 1} \left| \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n \right| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|z|^n}{n} \leq \sum_{n \geq 1} |z|^n$ qui converge (série géométrique)

(v) $\theta \neq \pi$: $z = e^{i\theta}$: $\quad \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta\, e^{in\theta}}{n} = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 n\theta}{n} + i \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\theta \sin n\theta}{n}$

Puisque $\theta \neq \pi$: $\cos^2 n\theta \geq \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$, d'où la partie réelle : $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos^2 n\theta}{n} \geq \varepsilon \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$.

Donc, la série diverge et le rayon de convergence $R = 1$.

4. $S(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ avec convergence uniforme pour $|z| \leq r < R$.

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) \overline{S(re^{i\theta})}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n \geq 0} a_n r^n e^{in\theta}\Big)\Big(\sum \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}\Big) d\theta$$

$$= \sum_{m,n \geq 0} a_m \overline{a_n}\, r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta}\, d\theta \quad \text{(On interchange } \textstyle\sum \text{ et } \int \text{ par convergence unif.)}$$

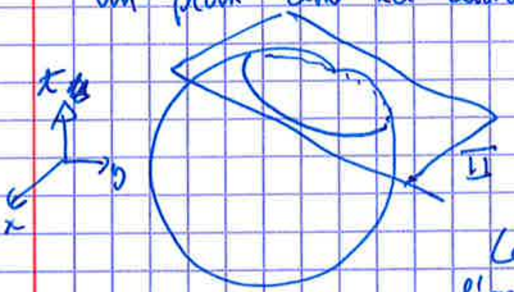
Mais l'intégrale est non-nulle que si $m = n$ lorsqu'elle égale 2π

$$\int_0^{2\pi} |S(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$$

Si $R = \infty$ et S bornée, l'intégrale est bornée pour tout r

$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \Rightarrow S(z) = a_0$ constante

6 et 7 Un cercle de $\mathbb{C}_\infty = S^2$ est l'intersection de S^2 avec un plan dont la distance à l'origine est < 1.



Projection stéréographique $S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ est donnée par
$$(x, y, t) \mapsto \frac{x+iy}{1-t}$$

plan Π : $ax + by + ct = d$. (1)

Le point de ce plan le plus proche à l'origine est $\dfrac{d\,(a, b, c)}{a^2+b^2+c^2}$

Il faut alors que $\dfrac{d^2\,(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)^2} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{d^2}{a^2+b^2+c^2} < 1$

On peut aussi supposer que $d = 1$, d'où $\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2} < 1$ (2)

Alors $z = \dfrac{x+iy}{1-t}$ vérifie $\alpha|z|^2 + \beta z + \bar\beta \bar z + \delta = 0$

ssi $\dfrac{\alpha(x^2+y^2)}{(1-t)^2} + \dfrac{\beta}{1-t}(x+iy) + \bar\beta\,\dfrac{(x-iy)}{1-t} + \delta = 0$

ssi $\alpha(x^2+y^2) + (1-t)\left[\beta(x+iy) + \bar\beta(x-iy)\right] + \delta(1-t)^2 = 0$ (*)

Mais $x^2+y^2+t^2 = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1-t^2$ donc (*) $\Leftrightarrow$

$\alpha(1-t^2) + (1-t)\left[\beta(x+iy) + \bar\beta(x-iy)\right] + \delta(1-t)^2 = 0$

$t \neq 1$ $\Leftrightarrow \alpha(1+t) + \beta(x+iy) + \bar\beta(x-iy) + \delta(1-t) = 0$

$\Leftrightarrow (\beta+\bar\beta)x + i(\beta-\bar\beta)y + (\alpha-\delta)t + \alpha + \delta = 0$

qui est de la forme (1) : il nous faut la condition (2) :

$(\alpha+\delta)^2 < (\beta+\bar\beta)^2 - (\beta-\bar\beta)^2 + (\alpha-\delta)^2$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\delta + \delta^2 < 4\beta\bar\beta + \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2$

$\Leftrightarrow |\beta|^2 - \alpha\delta > 0$.

8 (i) trivial

(ii) On montre que $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ est inversible : $(cz+d)w = az+b$

$\Rightarrow z(a - cw) = dw - b \Rightarrow z = \dfrac{-b+dw}{a-cw}$

(iii) On utilise l'écriture de la question 7. ($\alpha = 0$ correspond à une droite)

$$\alpha\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|^2 + \beta\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \bar\beta\left(\overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right) + \delta = 0$$

$\Leftrightarrow \alpha|az+b|^2 + \beta(az+b)(\bar c\bar z+\bar d) + \bar\beta(\bar a\bar z+\bar b)(cz+d) + \delta|cz+d|^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha(|a|^2|z|^2 + az\bar b + \bar a\bar z b + |b|^2 + (\beta a\bar c + \bar\beta\bar a c)|z|^2 + \cdots$

et on vérifie que la partie gauche est bien de la forme requise.

§2

2. $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^x(\cos y + i\sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)\right]$

$= \frac{1}{2}\cos y\,(e^x + e^{-x}) + \frac{i}{2}\sin y\,(e^x - e^{-x})$

$= \cos y \operatorname{ch} x + i \sin y \operatorname{sh} x$

Soit $u(x,y) = \operatorname{ch} x \cos y$, $v(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sh} x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\operatorname{ch} x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

d'où les équations de CR sont vérifiées et ch z est holomorphe.

3. $f(x+iy) = u(x) + i v(y)$ est $\mathbb{C}$-diff ssi les équations CR

ssi $u'(x) = v'(y)$. Mais puisque la partie gauche est fonction de x et la partie droite est fonction de y, on a

$\lambda = u'(x) = v'(y)$ λ constante ~~réelle~~ réelle

$\Rightarrow u = \lambda x + a$, $v = \lambda y + b$.

$\Rightarrow f = u + iv = \lambda z + a + ib = \lambda z + c$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$.

4. $1 + e^z = 1 + e^x(\cos y + i \sin y) = (1 + e^x \cos y) + i e^x \sin y$

qui s'annule ssi $\begin{cases} e^x \sin y = 0 \\ 1 + e^x \cos y = 0 \end{cases}$ si $\sin y = 0$: $y = k\pi$ et $e^x \cos y = -1$.

ssi $\boxed{y = (2k+1)\pi \text{ et } x = 0}$

etc.

6. $\ln_0$ est défini dans $\mathbb{C} \setminus L_0 = \mathbb{C} \setminus \{x+iy \mid y = 0, x \leq 0\}$

Pour n assez grand $\operatorname{Re}(1 + \frac{z}{n}) > 0 \Rightarrow 1 + \frac{z}{n} \in \mathbb{C} \setminus L_0$

On suppose n assez grand pour que $|\frac{z}{n}| < 1$

$n \ln_0(1 + \frac{z}{n}) = n\left(\frac{z}{n} - \frac{z^2}{2n^2} + \frac{z^3}{3n^3} - \dots\right) = z + \frac{1}{n}\Big(\underbrace{-\frac{z^2}{2n} + \frac{z^3}{3n^2} - \dots}_{\text{série convergente}}\Big)$

$\rightarrow z + 0$ lorsque $n \to \infty$

Puisque $\ln_0$ est continue $n \ln_0(1 + \frac{z}{n}) \to z$

$\Rightarrow \exp\left(\ln_0(1 + \frac{z}{n})^n\right) \to e^z$

$\Rightarrow (1 + \frac{z}{n})^n \to e^z$ lorsque $n \to \infty$.

8. Soit $g(z) = f(z) - f(-z)$.

S'il existe z_0 avec $g(z_0) > 0$ alors $g(-z_0) = f(-z_0) - f(z_0)$

$= -g(z_0) < 0$

Par continuité, il existe un point z_1 avec $g(z_1) = 0$

c'est à dire $f(z_1) = + f(-z_1)$.

10. Si $x+iy \neq 0$, $f(x+iy) = \underbrace{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{u(h,0)-u(0,0)}{h} = \frac{0}{h^3} = 0 \to 0$ ~~lorsque h→0~~

$\frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{v(0,k)-v(0,0)}{k} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0)$

$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{u(0,k)-u(0,0)}{k} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$

Donc, les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées en $(0,0)$.
Par contre f n'est pas $\mathbb{C}$-dérivable en $(0,0)$, car

~~$\lim_{h+ik\to 0} \frac{h^2k+ihk^2}{h^2+k^2}$ n'existe pas~~

~~par exemple, si $k=0$, $h\to 0$ la limite est 0~~
~~si $h=k\to 0$:~~

$\lim_{h+ik\to 0} \frac{f(h+ik)-f(0)}{h+ik} = \lim_{h+ik\to 0} \frac{hk(h+ik)}{(h^2+k^2)(h+ik)}$ n'existe pas :

si $k=0$ et $h\to 0$ la limite est 0

si $h=k\to 0$, alors la limite est $\frac{1}{2}$.

11. Si $f : U \to \mathbb{C}$, $f(U) \subset \mathbb{R}$.

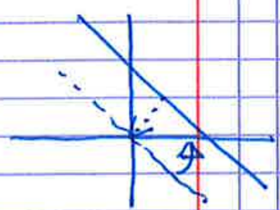
En écrivant $f = u+iv$, : $v=0$
donc $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (équations CR)

$\Longrightarrow$ u constante. et donc f constante.

Soit L la droite : $ax+by=c$
On suppose $f : U \to L$.
Alors si $f = u+iv$: $au+bv=c$

alors $\tilde{f} = f - \frac{c}{(a^2+b^2)}(a+ib)$

prend ses valeurs dans la droite $ax+by=0$



Soit $g = e^{i\theta}\tilde{f}$ où $\cos\theta = \frac{b}{a^2+b^2}$, $\sin\theta = \frac{a}{a^2+b^2}$

vérifie $\mathrm{Im}\, g = 0$

En plus g est holomorphe
et par la 1ère partie g est constante.
De même pour f.

§3.

$\gamma_1 : [0 \to 1+i] : \gamma_1(t) = t(1+i),\ 0 \le t \le 1$

$\gamma_2 : [0 \to 1] : \gamma_2(t) = t,\ 0 \le t \le 1$

$\gamma_3 : [1 \to 1+i] : \gamma_3(t) = (1-t) + t(1+i) = 1 + ti,\ 0 \le t \le 1$

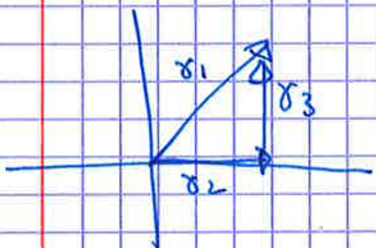
$$\int_{\gamma_1} z(z-1)\,dz = \int_0^1 t(1+i)\big(t(1+i)-1\big)\underbrace{(1+i)}_{\gamma_1'(t)}dt$$

$$= (1+i)^2 \int_0^1 \big(t^2(1+i) - t\big)\,dt$$

$$= \frac{(1+i)^3}{3} - \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{2}{3}(-1+i) - i = -\frac{2}{3} - \frac{i}{3}$$

$$\int_{\gamma_2} z(z-1) = \int_0^1 t(t-1)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

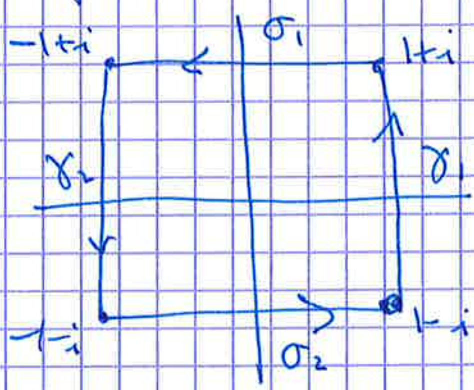
$$\int_{\gamma_3} z(z-1)\,dz = \int_0^1 (1+ti)(ti)\,i\,dt = \frac{i^3}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{i}{3} - \frac{1}{2}$$



$$\int_{\gamma_2} z(z-1)\,dz + \int_{\gamma_3} z(z-1)\,dz = -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{i}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{i}{3}$$

$$= \int_{\gamma_1} z(z-1)\,dz$$

3.



$\gamma_1 : (1-t)(1-i) + t(1+i)\quad 0 \le t \le 1$

$= 1 + (2t-1)i$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)i}\,2i\,dt$$

$\gamma_2 : (1-t)(-1+i) + t(-1-i)\quad 0 \le t \le 1$

$= -1 + (1-2t)i$

$= -1 - (2t-1)i$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = \int_0^1 \frac{(-1)}{1+(2t-1)i}(-2i)\,dt$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z}\,dz = 4i \int_0^1 \frac{1}{1+(2t-1)i}\,dt = 2\ln_0\big(1+(2t-1)i\big)\Big|_0^1$$

$$= 2\big(\ln_0(1+i) - \ln_0(1-i)\big) = 2\ln_0\left(\frac{1+i}{1-i}\right) = 2\ln_0\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right) = 2\ln_0 i$$

$$= 2i\arg(i) = 2i\frac{\pi}{2} = i\pi$$

De même $\displaystyle\int_{\sigma_1} \frac{1}{z}\,dz + \int_{\sigma_2} \frac{1}{z}\,dz = i\pi$

Et on obtient $\underline{\underline{2i\pi}}$.

6. $\ln_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ pour $|z| < 1$

$\ln_0(1+z) = \ln_0(1+tz)\Big|_{t=0}^{t=1} = \int_{t=0}^{1} \frac{1}{1+tz} z \, dt$

Pour $z \neq -1$, $|z| = 1$: la fonction $t \mapsto \frac{z}{1+tz}$ $0 \leq t \leq 1$ est continue et bornée. donc unif cont.

Par suite la limite lorsque $t \to 1$ $t < 1$ existe, c'est à dire

$t < 1$: $\frac{z}{1+tz} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-tz)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n z^{n+1}$

En intégrant terme à terme (par la convergence uniforme :

$\ln_0(1+z) = \int_{t=0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n z^{n+1} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n (-1)^n z^{n+1}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$

est bien définie pour $z \neq -1$.

Soit $z = e^{it}$ pour $-\pi < t < \pi$.

$\ln_0(1+e^{it}) = \ln_0(1+\cos t + i \sin t) = \ln|1+\cos t + i \sin t| + i \arg_0(1+\cos t + i \sin t)$

C'est à dire : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{int} = \ln|1+\cos t + i \sin t| + i \arg_0(1+\cos t + i \sin t)$ (*)

$\arg_0(1+\cos t + i \sin t) = \arctan \frac{\sin t}{1+\cos t}$

$= \arctan \frac{2 \sin\frac{t}{2} \cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \arctan\left(\tan\frac{t}{2}\right) = \frac{t}{2}$

En prenant la partie imaginaire d'(*), on en déduit que

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt = \frac{t}{2}$.

§ 4

2. Formule de Cauchy: $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, $\overline{D(a,r)} \subset U$, $\gamma(t) = C(a,r) := a + re^{it}$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \forall z \in D(a,r).$$

(**) en particulier $\int_{C(a,r)} \frac{1}{z-b}\,dz = 2\pi i$ pour $b \in D(a,r)$ (on choisit $f \equiv 1$)

(i) $|a|, |b| < 1$: $\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$ $a \neq b$

et $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left\{\int_{C(0,1)} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{C(0,1)} \frac{1}{z-b}\,dz\right\} = 0$

si $a = b$: $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{(z-a)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}\,dt}{(e^{it}-a)^2} = -\frac{1}{e^{it}-a}\Big|_0^{2\pi} = 0$

(ii) $|a| < 1$, $|b| > 1$. Alors $f(z) = \frac{1}{z-b}$ est holomorphe dans $D(0,1)$

d'où $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{f(z)\,dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz$

et donc $\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 2\pi i\, f(a) = \frac{2\pi i}{a-b}$

(iii) $|a|, |b| > 1$: $\int_{C(0,1)} \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,dz = 0$ car $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ est holomorphe dans $D(0,1)$.

3. $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,dz$: Soit $f(z) = e^z$

Par $(*)$ $f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1}\,dz$ (et $1 \in D(0,2)$)

et donc $\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z-1} = 2\pi i\, f(1) = 2\pi i e$

$\int_{C(0,2)} \frac{e^z}{\pi i - 2z} = -\frac{1}{2} \int_{C(0,2)} \frac{e^z}{z - \frac{\pi i}{2}}$ Alors $\frac{\pi i}{2} \in D(0,2)$

On pose $f(z) = e^z$ encore: $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^z}{z - \frac{\pi i}{2}} = f\left(\frac{\pi i}{2}\right) = e^{\pi i/2} = i$

et donc $-\frac{1}{2} \int_{C(0,2)} \frac{e^z\,dz}{z - \frac{\pi i}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2\pi) = \pi$

4. $\frac{1}{1-z+z^2} = \frac{1}{1-z(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n(1-z)^n$ d'où on voit que $a_0 = a_1 = 1$; on voit aussi que $a_2 = 0$

D'autre part $a_{n+3} + a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{1-z+z^2}\left(\frac{1}{z^{n+4}} + \frac{1}{z^{n+1}}\right)dz$

$\left(a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw \text{ en général}\right)$ $\gamma : re^{i\theta}$:

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(1-z+z^2)z^{n+4}}(1+z^3) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{(1-z+z^2)z^{n+4}}(1+z)(1-z+z^2)dz$

$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1+z}{z^{n+4}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{n+4}} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z^{n+3}} = 0$ car $n \geq 0$.

Pour le rayon de convergence, il faut que $|z(1-z)| < 1$

Si on pose $z = re^{i\theta}$: $r|1-re^{i\theta}| < 1$

$\iff r^2\left[(1-r\cos\theta)^2 + r^2\sin^2\theta\right] < 1$

$\iff r^2(1+r^2-2r\cos\theta) < 1$ il faut que c'est vrai $\forall\theta$:

d'où il faut que $r^2(1+r^2) < 1$

alors $r^2(1+r^2) = 1 \Rightarrow r^4+r^2-1 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Donc $r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et le rayon de convergence $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

6. La fonction $f(z) - \lambda$ est holomorphe non-constante. S'il y ~~a~~ avait un point d'accumulation de zéros de cette fonction, elle serait la fonction nulle par l'unicité des fonctions holomorphes. Par suite il n'y a aucun point d'accumulation de ~~zéros~~ zéros et les zéros sont dénombrable (on peut entourer chaque zéro par un disque ne contenant aucun autre zéro).

Si $f(\mathbb{C}) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ est dénombrable alors $\mathbb{C} = \bigcup_i f^{-1}(a_i)$. Mais par la 1ère partie de la question chaque $f^{-1}(a_i)$ est dénombrable. Or la réunion dénombrable d'ensembles dénombrable est lui-même dénombrable. Ceci est une contradiction car $\mathbb{C}$ n'est pas dénombrable.

7. Le point 1 fait partie du disque $D(i, 2)$, donc l'intégrale est égale à

$$I = \int_{C(1,1)} \frac{e^z}{(z-1)^n}\,dz$$

qui correspond ~~au coefficient~~ ~~a_{n-1}~~ à $2\pi i\, a_{n-1}$

où a_{n-1} est le coefficient dans le développement de e^z autour du point $z = 1$

Mais $e^z = e^{z-1+1} = e\, e^{z-1} = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$

Il s'ensuit que $I = \frac{2\pi i\, e}{(n-1)!}$

8. Soit $a_1, \ldots, a_n$ les zéro de f dans U, chacun de multiplicité $m_1, \ldots, m_n$.

Alors la fonction $v(z) = \frac{f(z)}{(z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_n)^{m_n}}$

a une singularité éliminable en chaque a_j ; elle est donc holomorphe dans U, et non-nulle (car un zéro de v serait un zéro de f différent de a_j).

Il s'ensuit que $f(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_n)^{m_n}\, v(z)$

9 (i) e^z, (ii) $e^z - 1$, (iii) $\sin z$.

10. $|f(z) - a| > \varepsilon$ ssi $\frac{1}{|f(z)-a|} < \frac{1}{\varepsilon}$

Il s'ensuit que la fonction entière $\frac{1}{f(z)-a}$ est bornée et par le théorème de Liouville, elle est constante. Il s'ensuit que f est constante.

Si f est non-constante entière alors, quelque soit $a \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ il existe $z \in \mathbb{C}$ avec
$$|f(z) - a| < \varepsilon$$
Il s'ensuit que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

§5.

1. $f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin z}{z \sin z}$.

Alors $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$ (fonction entière)

$z - \sin z = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} - \dots$

$z \sin z = z^2 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} - \dots$

On voit alors que $f(z)$ présente $\boxed{\text{un zéro d'ordre 1 en } z=0}$

$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\left(e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right)$

$= \frac{1}{2i}\left(2\cos x \operatorname{sh} y + 2i \sin x \operatorname{ch} y\right)$

$\sin z = 0$ ssi $\begin{cases} \cos x \operatorname{sh} y = 0 \\ \sin x \operatorname{ch} y = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin x = 0$

$\Rightarrow x = k\pi$, puis $\operatorname{sh} y = 0 \Rightarrow y = 0$

Donc $\boxed{z = k\pi}$ sont des pôles pour $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

~~Tout~~ Tous ces pôles sont d'ordre 1, car identique à l'ordre du zéro de $\sin z$ en $z=0$ (par symétrie translationnelle de $\sin z$)

2. $f(z) = e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{-\infty}^{n=0} \frac{z^n}{(-n)!}$

Dans le disque pointé $\mathring{D}(0,1)$:

4. ~~$\frac{f(z)}{z(z^2+1)}$~~ $f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-z^2)^k$

$= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k-1} = \sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1} z^{2k+1}$

(*) 2ème partie - voir page 11

6. Cette question est fausse! La fonction $\tan(\frac{1}{z})$ est méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, avec pôles simples en $z_n = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Puisque $z_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors $z=0$ est un point d'accumulation de ~~pôles~~ singularités.

7.

Soit $B \subset D(0, R)$ pour $R > 0$.

On écrit $z = re^{i\theta}$: $e^z = e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

$= e^{r\cos\theta}\left(\cancel{\cos(r\cos\theta) + i}\ \cos(r\sin\theta) + i\sin(r\sin\theta)\right)$

Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $w = se^{i\psi} = s(\cos\psi + i\sin\psi)$

On résout : $e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta) = s\cos\psi$

$e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta) = s\sin\psi$.

$\tan\psi = \tan(r\sin\theta) \Rightarrow \boxed{r\sin\theta = \psi + 2k\pi}$

$e^{2r\cos\theta} = s^2 \neq 0$

$2r\cos\theta = \ln s^2 \Rightarrow \boxed{r\cos\theta = \ln s}$

$r^2 = (\ln s)^2 + (\psi + 2k\pi)^2$ (1)

Alors, pour w donné, $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $|z| > R$

où $z = re^{i\theta}$ avec r déterminé par (1)

et θ par : $\tan\theta = \dfrac{\psi + 2k\pi}{\ln s}$ (2)

(même si $s = 1$ et $\ln s = 0$, car $\tan\theta = \pm\infty$ présente des solutions)

$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$: $\cos z = w \Leftrightarrow e^{iz} + e^{-iz} = 2w$

$\Leftrightarrow e^{iz} - 2w + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0$

$\Rightarrow e^{iz} = \dfrac{2w \pm \sqrt{4w^2 - 4}}{2} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}$

Alors $w \pm \sqrt{w^2-1}$ n'est jamais zéro $\left(\begin{array}{l} w = \pm\sqrt{w^2-1} \\ \Rightarrow w^2 = w^2 - 1 \\ \Rightarrow 0 = -1 \ \times \end{array}\right)$

et par la 1ère partie de la question, il existe $\tilde{z}$: $e^{\tilde{z}} = w + \sqrt{w^2-1}$

On pose $z = -i\tilde{z}$

4(ii) On pose $z = \frac{1}{w}$: $\dfrac{1}{z(z^2+1)} = \dfrac{w^3}{1+w^2} = w^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^{2n}$ $\forall w$ avec $|w| < 1$

$= \dfrac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n}$ $\forall z$ avec $|z| > 1$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n-3} = \sum_{-\infty}^{n=0} (-1)^n z^{2n-3}$

$n \to -n$

9. Soit $R > 0$ t.q. tous les points singuliers de f soient contenus dans le disque $D(0, R)$.

Soit $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ et soit

$g(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n$ le développement en série de Laurent de g dans le disque $D\left(0, \frac{1}{R}\right)$

Par hypothèse $\frac{1}{w} g(w) = w\left(\frac{g(w)}{w^2}\right) \to 0$ lorsque $w \to 0$

d'où $\frac{g(w)}{w^2}$ présente une singularité éliminable en $w = 0$.

Cette fonction est donc bornée dans un disque $D(0, R_1)$ centré en 0, d'où $z^2 f(z)$ est bornée dans $|z| > R_1$

1. $f(z) = \dfrac{e^{az}}{z^2+1} = \dfrac{e^{az}}{(z+i)(z-i)}$

Deux pôles simple contenus dans le cercle $C(0,2)$ en $z = \pm i$

$\underline{z=i}$: $\mathrm{Res}_i(f) = \lim\limits_{z\to i} (z-i) f(z) = \dfrac{e^{ai}}{2i}$

$z=-i$: $\mathrm{Res}_{-i}(f) = \lim\limits_{z\to -i} (z+i) f(z) = \dfrac{e^{-ai}}{-2i}$

$$\int_{C(0,2)} f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_i(f) + \mathrm{Res}_{-i}(f)\right) = \frac{2\pi i}{2i}\left(e^{ai} - e^{-ai}\right)$$

$$= \pi\left(\cos a + i\sin a - \cos a + i \sin a\right) = 2\pi i \sin a.$$

2. $f(z) = \sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^n$ avec $a_k \neq 0$, $g(z) = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} b_n (z-a)^n$

Alors $\mathrm{ord}\left(\frac{f}{g}, a\right) = k - (k+1) = -1$; d'où $\frac{f}{g}$ présente un pôle simple en $z=a$ et $\mathrm{Res}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \lim\limits_{z\to a} (z-a)\dfrac{f(z)}{g(z)}$

$$= \lim_{z\to a} \frac{\sum\limits_{n=k}^{\infty} a_n (z-a)^{n+1}}{\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} b_n (z-a)^{n+1}} = \lim_{z\to a} \frac{a_k + O(z-a)}{b_{k+1} + O(z-a)} = \frac{a_k}{b_{k+1}}$$

D'autre part $a_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $b_{k+1} = \dfrac{g^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}$

d'où le résultat.

3. $\dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)} = \dfrac{e^{iz}}{z(z+i)(z-i)}$ pôles simples en $z = 0, \pm i$

exemple: $\mathrm{Res}_i f = \lim\limits_{z\to i} (z-i) f = \dfrac{e^{-1}}{i\,2i} = \dfrac{-1}{2e}$

$$\frac{1}{z-\sin z} = \frac{1}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots} = \frac{3!}{z^3}\,\frac{1}{1 - z^2\left(\frac{3!}{5!}\right) + O(z^4)}$$

$$= \frac{3!}{z^3}\left\{1 + \frac{3!}{5!}z^2 + O(z^4)\right\}$$

Le résidu est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans la série de Laurent, c'est à dire:
$$\frac{(3!)^2}{5!} = \frac{3\times 2}{5\times 4} = \frac{3}{10}.$$

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{1}{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} \dots} = \frac{2!}{z^2}\,\frac{1}{1 - z^2\left(\frac{2!}{4!}\right) + O(z^4)} = \frac{2!}{z^2}\left(1 + z^2\left(\frac{2!}{4!}\right) + O(z^4)\right)$$

d'où on voit que le coeff de $\frac{1}{z}$ est 0

et $\mathrm{Res}_0 \dfrac{1}{1-\cos z} = 0$

5. $E(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}dz$; $|g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \gamma([0,1])$

(i) Puisque $\gamma([0,1])$ compact, et $|f(z)|-|g(z)|$ continue et ≥ 0
l'inf $\{|f(z)|-|g(z)| \mid z \in \gamma([0,1])\}$ est atteint et égale à $\delta > 0$

(ii) Les pôles de $f(z)+tg(z)$ coincident avec les pôles de f et de g – dont aucun dans $\gamma([0,1])$
Si $f(z)+tg(z) = 0$ sur $\gamma([0,1])$
$\Rightarrow \exists z \in \gamma([0,1])$ avec $f(z) = -tg(z) \Rightarrow |f(z)| = t|g(z)|$
Impossible car $0 \leq t \leq 1$ et $|g(z)| < |f(z)|$ $\forall z \in \gamma([0,1])$.
Donc l'intégrale est définie.
En plus $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h'}{h} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{ord}(h,a_j)\,\mathrm{Ind}_\gamma(a_j)$ où a_j sont les pôles et zéros de h (voir poly copié du cours) – il s'agit d'un entier.

(iii) $(*)$ $\left|\frac{(f'+ug')(z)}{(f+ug)(z)} - \frac{(f'+tg')(z)}{(f+tg)(z)}\right|$ $\quad 0 \leq t < u \leq 1$, $z \in \gamma([0,1])$

$|f(z)+ug(z)| \geq |f(z)| - u|g(z)| \geq |f(z)|-|g(z)| \geq \delta$
$|f(z)+tg(z)| \geq \dots \geq \delta$.

$(*) = \left|\frac{\cancel{f'f} + \cancel{utgg'} + tf'g + ug'f - \cancel{ff'} - \cancel{utgg'} - tfg' - ugf'}{(f+ug)(f+tg)}\right| \leq \frac{u-t}{\delta^2}|(f'g-fg')(z)|$

$= |E(u)-E(t)| \leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{(f'+ug')(z)}{(f+ug)(z)} - \frac{(f'+tg')(z)}{(f+tg)(z)}\right)dz\right|$
$\leq \frac{1}{2\pi} L(\gamma)\frac{(u-t)}{\delta^2}\max_{z\in\gamma([0,1])}|f'(z)g(z)-f(z)g'(z)| = k(u-t)$
avec k const indep. de u et t.

(iv) Si $u-t < \frac{1}{k} \Rightarrow |E(u)-E(t)| < 1 \Rightarrow E(u) = E(t)$ (car $E(s)$ entier)
Soit $n > k$: $E(0) = E(\frac{1}{n}) = E(\frac{2}{n}) = \dots = E(\frac{n-1}{n}) = E(1)$
et $ZP(f+g,\gamma) = ZP(f,\gamma)$.

Question supplémentaire : (voir remarques complémentaires) $z^4+26z+2$ présente trois racines dans la couronne $5/2 < |z| < 3$.

- Pour $|z|=3$: $|26z+2| \leq 26|z|+2 = 26\times3+2 = 80 < 81 = |z|^4$
d'où le nombre de zéros dans $|z| \leq 3$ de z^4 et $z^4+26z+2$ est même, c'est à dire 4 :
- D'autre part, pour $|z| = \frac{5}{2}$: $|26z+2| \geq 26|z|-2 = 5\times13-2 = 63 > (\frac{5}{2})^4$ $\frac{625}{16}$
d'où le nombre de zéros de $26z+2$ dans $|z| \leq 5/2$ est le même que le nombre de zéros de $z^4+26z+2$, c'est à dire 1.
D'où, il y a trois zéros dans la couronne $5/2 < |z| < 3$.

[Ces zéros sont distincts, car un zéro multiple vérifie $f(z) = 0 = f'(z)$:
$z^4+26z+2=0$, $4z^3+26=0$ $\Rightarrow$ ~~$2z^4+52z^2+2z=0$~~ $\left.\begin{array}{l}2z^4+52z+4=0\\2z^4+13z=0\end{array}\right\} \Rightarrow 39z=-4 \Rightarrow z = -\frac{4}{39}$ pas dans la couronne]