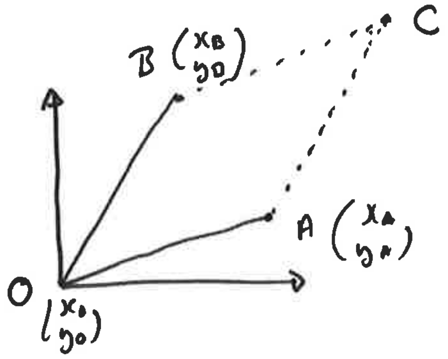
Exercices d'entraînement : quelques solutions des questions qui ne sont pas traitées ailleurs

1. Voir solutions aux exercices: I question $\overline{\text{IX}}$.
2. " " " " $\overline{\text{X}}$.
3. 

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$
$$= \begin{pmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_B - x_0 \\ y_B - y_0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

coords de C: $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \vec{OC} = \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + x_B - x_0 \\ y_A + y_B - x_0 \end{pmatrix}$

Bien évidemment, si O est l'origine $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'aire du parallélogramme $OACB$ est donnée par

$$\left\| \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

(je prends $x_0 = y_0 = 0$) (sinon on remplace x_A par $x_A - x_0$ etc)

Alors $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & 0 \\ x_B & y_B & 0 \end{vmatrix} = (x_A y_B - x_B y_A)\vec{k}$

donc la norme est $|x_A y_B - x_B y_A|$

L'aire du triangle est la moitié : $\boxed{\frac{1}{2}|x_A y_B - x_B y_A|}$

Si $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ on obtient $\frac{1}{2}|1 \times 2 - 3 \times 1| = \frac{1}{2}$.

4. Voir solutions aux exercices $\overline{\text{II}}$, question $\overline{\text{II}}$

6. La distance d'un point X à une droite D est la plus petite distance parmi $d(X,Y)$ lorsque Y parcourt les points de D.

Intersection de $\begin{cases} x+y-z=1 & (1) \\ 2x-y+z=2 & (2) \end{cases} \overset{(1)+(2)}{\Longrightarrow} 3x = 3 \Rightarrow x = 1$

Puis $y - z = 0 \Rightarrow y = z$

Il s'agit de la droite passant par $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ de vecteur directeur $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, ~~donc~~ qu'on peut paramétrer sous la forme $t \mapsto \begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix}$

distance entre $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix}$ est $\sqrt{(t+1)^2+(t-2)^2}$

$$= \sqrt{2t^2-2t+5}$$

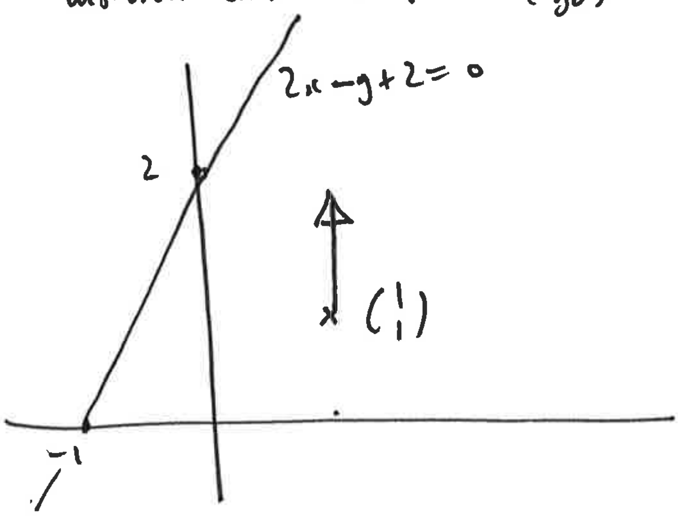
La distance est minimisée lorsque sa carrée est minimisée, c'est à dire lorsque $2t^2-2t+5$ est minimiser.
On prend la dérivée par rapport à t

$$\frac{d}{dt}(2t^2-2t+5) = 4t-2$$ qui est minimisée lorsque $t = \frac{1}{2}$

La distance est alors

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+1\right)^2+\left(\tfrac{1}{2}-2\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

7. distance entre le point $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ et la droite $ax+by+c=0$ est $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



Suite...

La droite de parcours du bateau est

$$t \mapsto \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1+t\end{pmatrix}$$

La distance entre ce point et la droite $2x-y+2=0$ (la côte) est

$$\frac{|2-1-t+2|}{\sqrt{5}} = \frac{|3-t|}{\sqrt{5}}$$

ce qui vaut 1, lorsque $|3-t| = \sqrt{5}$
c'est à dire lorsque $t = 3-\sqrt{5}$

~~la dis~~ P est le point $\begin{pmatrix}1\\1+3-\sqrt{5}\end{pmatrix}$

La distance parcourue entre $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et P est

$$\left\| \begin{pmatrix}1\\1+3-\sqrt{5}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\| = 3-\sqrt{5} \text{ km.}$$

A une vitesse de 10 km/hr, on prendra $\frac{3-\sqrt{5}}{10}$ hr
(distance = vitesse × temps)

8. Il s'agit du même type de question que dans le devoir préparatoire, dont la solution était discutée en classe.
La conique est définie comme l'ensemble de points X t.q.

$$d(X,F) = e\,d(X,D). \iff d(X,F)^2 = e^2 d(X,D)^2$$

$$\iff x^2 + (y-1)^2 = 4 \times [x-y-1]^2 / 2$$

$$\iff x^2 + (y-1)^2 = 2(x-y-1)^2$$

$$\iff x^2+y^2-2y+1 = 2(x^2+y^2+1-2xy-2x+2y)$$

$$\iff \boxed{x^2+y^2-4xy-4x+6y+1=0} \quad (*)$$

Axe focal passe par le foyer $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ avec vecteur directeur orthogonal à la directrice, c'est à dire avec vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
On la paramétrise sous la forme $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t\\1-t\end{pmatrix}$
Son équation: $x+y+d=0$
elle passe par $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, d'où $1+d=0 \Rightarrow d=-1$

$$\boxed{x+y-1=0}$$

Suite...

Points d'intersection avec la conique : on substitue dans (**) :

$$t^2+(1-t)^2-4t(1-t)-4t+6(1-t)+1=0$$

$$\Leftrightarrow\ 6t^2-16t+8=0$$

$$\Leftrightarrow\ 3t^2-8t+4=0 \Leftrightarrow t=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{6}$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{8\pm4}{6}=\cancel{\frac{2}{3}\ \text{et}\ 2}$$

$$=\frac{4\pm2}{3}=\frac{2}{3}\ \text{et}\ 2$$

Les deux points sont $\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$

Le centre est situé au mi-point, c'est à dire en

$$\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2-2/3\\-1-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4/3\\-4/3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2/3\\1/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

9. Rotation par $\pi/4$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\pi/4-y\sin\pi/4\\x\sin\pi/4+y\cos\pi/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt2}-\frac{y}{\sqrt2}\\\frac{x}{\sqrt2}+\frac{y}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

Si $X=\frac{x}{\sqrt2}-\frac{y}{\sqrt2}$ et $Y=\frac{x}{\sqrt2}+\frac{y}{\sqrt2}$ $\Rightarrow$ $X+Y=\frac{2x}{\sqrt2}=\sqrt2 x \Rightarrow x=\frac{X+Y}{\sqrt2}$

et $Y-X=\frac{2y}{\sqrt2}=\sqrt2 y \Rightarrow y=\frac{Y-X}{\sqrt2}$

$$xy=1/2 \Leftrightarrow \frac{(X+Y)}{\sqrt2}\frac{(Y-X)}{\sqrt2}=\frac12 \Leftrightarrow \boxed{-X^2+Y^2=1}$$

Il s'agit d'une hyperbole avec axe focal : l'axe des Y, c'est à dire $X=0$

et avec foyers en $(0,\pm\sqrt2)$

$X=0 \Leftrightarrow \boxed{x-y=0}$ axe focal

$X=0$ et $Y=\pm\sqrt2$ ssi $x=\frac{\sqrt2}{\sqrt2}$, $y=\frac{\sqrt2}{\sqrt2}$ $(Y=\pm\sqrt2)$

et $x=-\frac{\sqrt2}{\sqrt2}$, $y=-\frac{\sqrt2}{\sqrt2}$ $(Y=-\sqrt2)$

foyers : $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$

10 & 11 : Voir solution aux exercices III

12. $I = \int \frac{1}{1+4x^2}dx$: soit $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

$$I = \int \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u = \boxed{\frac{1}{2}\arctan 2x} + C$$

$$J = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}dx \qquad \text{soit } u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2}$$

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, 2du = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u = \boxed{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C}$$

13. Soit $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{u^{3/2}}{3} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3} + C$$

14.

$$f(x,y) = x^2y - y^2x + 2xy$$

(a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 + 2y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy + 2x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x - 2y + 2$

(b) $\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 + 2y \\ x^2 - 2xy + 2x \end{pmatrix}$

(c) $\begin{cases} 2xy - y^2 + 2y = 0 & (1) \\ x^2 - 2xy + 2x = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow y(2x - y + 2) = 0 \Rightarrow$ soit $y = 0$ soit $2x - y + 2 = 0$

(2) $\Leftrightarrow x(x - 2y + 2) = 0 \Rightarrow$ soit $x = 0$ soit $x - 2y + 2 = 0$

Si $y = 0$ alors $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow$ soit $x = 0$ soit $x = -2$.
On obtient les deux points $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $x = 0$ alors $-y^2 + 2y = 0 \Rightarrow$ soit $y = 0$ soit $y = 2$
et on obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Si $x \neq 0$, $y \neq 0$ alors $\begin{cases} 2x - y + 2 = 0 & (3) \\ x - 2y + 2 = 0 & (4) \end{cases}$ $\quad (3) - 2\times(4) \Rightarrow 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

et $x = 2y - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$. Sol^n $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.