Probabilités : terminologie et formules utiles

Terminologie

• On convient de représenter une expérience aléatoire par l'ensemble Ω (l' univers) de tous les résultats possibles de cette expérience. Un élément de Ω est une expérience élémentaire ou une épreuve.

• Un événement aléatoire A lié à une expérience est représenté par l'ensemble des expériences élémentaires pour lesquelles l'evenement A est réalisé. Il s'agit d'un sous-ensemble de Ω. Par exemple :

On jette un dé. Le résultat est un événement élémentaire dans $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mais les sous-ensembles (y compris les événements élémentaires) sont simplement appelés des événements. Des événements de cet univers peuvent être :

" obtenir un nombre pair", ensemble constitué de $\{2, 4, 6\}$;

" obtenir un nombre qui est ni divisible par 3 ni divisible par 2", ensemble constitué de $\{1, 5\}$.

• Une tribu $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω) est la classe de tous les événements possibles liés à une expérience ; elle doit vérifier les propriétés suivantes:

(i) $\Omega \in \mathcal{T}$;

(ii) $\mathcal{T}$ est stable par complémentation ;

(iii) $\mathcal{T}$ est stable par réunion dénombrable.

• On appelle le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable ; $\mathcal{T}$ est appelé tribu des événements.

• On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ une function $p : \mathcal{T} \to [0, 1]$ vérifiant

(i) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'événements de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints

$$p(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbf{N}} p(A_n) \qquad (p \text{ est } \sigma - additive);$$

(ii) $p(\Omega) = 1$.

Le triple $(\Omega, \mathcal{T}, p)$ s'appelle un espace probabilisé.

• Si Ω est fini, la probabilité $p(\omega) = 1/|\Omega|$ où $|\Omega|$ est le cardinal de Ω s'appelle la probabilité uniforme sur Ω ; c'est la probabilité qui rend toutes les épreuves ω équiprobable. On a alors, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Formules de dénombrement

• Le nombre d'applications d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments est n^k.

• Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments (bijections de cet ensemble dans lui-même) est $n!$.

• Le nombre d'arrangements ou injections d'un ensemble à k éléments dans un ensemble à n éléments ($n \geq k$) est $n!/(n-k)!$.

• Le nombre de combinaisons ou sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

Terminologie plus avancée

• La probabilité conditionnelle de A sachant B est

$$p(A|B) := \frac{p(A \cap B)}{p(B)} .$$

• Les événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B) \Leftrightarrow p(A|B) = p(A) \Leftrightarrow p(B|A) = p(B)$.

• Formule de Bayes:

$$p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)} .$$

• Une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to R \subset \mathbf{R}$ où R est fini ou dénombrable. Une variable aléatoire continue sur $(\Omega, \mathcal{T})$ est une application $X : \Omega \to \mathbf{R}$ telle que pour tout intervalle $]a, b[\subset \mathbf{R}$ on a $X^{-1}(]a, b[) \in \mathcal{T}$.

• Donnée une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{T}, p)$, on définit la loi de probabilité ou distribution de probabilité de X par

$$p_X(]a, b[) := p(X \in]a, b[) := p(X^{-1}(]a, b[)$$

• On appelle fonction de répartition de X la fonction $F(x) = p(X < x) := p(X^{-1}(]-\infty, x[))$.

• Une densité de probabilité est une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \,, \quad \text{autrement dit :} \quad p_X(]a, b[) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Elle vérifie $f(t) \geq 0$ pour tout t et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

• Loi uniforme continue : $f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{[a,b]}$.

• Loi uniforme discrète : Soit $p(x_j) := p(X = x_j)$, $j = 1, \ldots, n$: $p(x_j) = 1/n$ ($p(x_j)$ joue le rôle de $f(x_j)$).

• Loi de Bernoulli : $j = 2$ dans le précedant et $p(x_1) = p$, $p(x_2) = 1 - p$ pour $0 \leq p \leq 1$.

• Loi de Gauss (cont): $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\dfrac{1}{2} \left(\dfrac{x-\mu}{\sigma} \right)^2 \right\}$ (espérance μ, variance σ^2).

• <u>Espérance</u> : pour une loi discrète avec variable aléatoire X :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_j x_j p(x_j)\,.$$

Pour une loi continue associée à une variable aléatoire X avec densité f :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

(si une loi avec densité $g(t)$ a lieu dans un intervalle fini $]a,b[$, on peur écrire $f(t) = g(t)\mathbb{I}_{]a,b[}(t)$ afin de se ramener à une intégrale sur $]-\infty,+\infty[$).

• <u>Variance</u> : pour une loi discrète avec variable aléatoire X et espérance μ, la variance est définie par

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathbb{E}(X-\mu)^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \sum_j (x_j-\mu)^2 p(x_j)\,.$$

Pour une loi continue associée à une variable aléatoire X avec densité f, on a la même définition et puis

$$\mathrm{Var}\,(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

On écrit souvent $\mathrm{Var}\,(X) = \sigma^2$ où σ est la <u>déviation</u>.