Primitives à retenir

Dans la suite C est une constante arbitraire.

$$\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}\mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha+\mathrm{i}\beta)x}}{\alpha+\mathrm{i}\beta} + C \qquad \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \, \cos x} = \ln|\tan x| + C$$

$$\int \mathrm{sh}\, x \,\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C \qquad \int \mathrm{ch}\, x \,\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C \qquad \int \mathrm{th}\, x \,\mathrm{d}x = \ln \mathrm{ch}\, x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x} = \ln\left|\mathrm{th}\,\frac{x}{2}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}\, x} = 2\arctan(e^x) + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{th}\, x} = \ln|\mathrm{sh}\, x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\coth x + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}\, x \,\mathrm{ch}\, x} = \ln|\mathrm{th}\, x| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{argsh}\frac{x}{|a|} + C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{argch}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

$$\int \cos x \, \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C \qquad \int \sin x \, \cos^n x \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

SUITE...

Calculs d'intégrales de la forme : $\boxed{\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x}$ où $f(x) = R(\cos x, \sin x)$ est une fraction rationnelle en sinus et cosinus : si le terme $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par

$$\begin{array}{lll} x \mapsto -x & \text{on pose} & t = \cos x \\ x \mapsto \pi - x & \text{on pose} & t = \sin x \\ x \mapsto \pi + x & \text{on pose} & t = \tan x \end{array}$$

Sinon on pose $t = \tan(x/2)$; on a en effet :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = 2\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,.$$

Calculs d'intégrales de la forme : $\boxed{\int R(x, \sqrt{Q(x)}\,)\,\mathrm{d}x}$ où R et une fraction rationnelle et Q est un polynôme de degré ≤ 2.

(a) Si $\deg(Q) = 1$, soit $Q(x) = \alpha x + \beta$ avec α, β des constantes, il suffut de poser $t = \sqrt{\alpha x + \beta}$, soit $x = (t^2 - \beta)/\alpha$ pour se ramener à une intégrale de fraction rationnelle.

(b) si $\deg(Q) = 2$, soit $Q(x) = x^2 + 2bx + c$ avec b, c des constantes, on peut poser $t = \sqrt{x^2 + 2bx + c} - x$, soit

$$x = \frac{t^2 - c}{2(b-t)} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + 2bx + c} = \frac{2bt - c - t^2}{2(b-t)}\,,$$

pour se ramener à une intégrale de fraction rationnelle.

Si le polynôme $x^2 + 2bx + c$ a deux racines réelles α et β on peut aussi prendre pour variable

$$t = \sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{\beta - \alpha t^2}{1 - t^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{x^2 + 2bx + c} = \frac{t(\beta - \alpha)}{1 - t^2}\,.$$

Pour les cas particulier lorsque $Q(x) = x^2 - 1$ ou $Q(x) = x^2 + 1$, on posera $x = \mathrm{ch}\, t$ et $x = \mathrm{sh}\, t$ respectivement.

Rappel sur les fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,.$$

<u>Propriétés</u> :

$$(\mathrm{sh}\,)'(x) = \mathrm{ch}\, x, \qquad (\mathrm{ch}\,)'(x) = \mathrm{sh}\, x, \qquad (\mathrm{th}\,)'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$$

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \qquad \mathrm{ch}\, 2x = 2\mathrm{ch}^2 x - 1, \qquad \mathrm{sh}\, 2x = 2\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x\,.$$