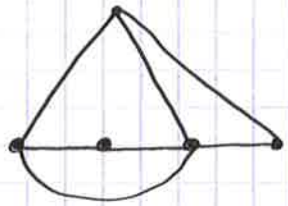
Calcul du polynôme chromatique

G



Deux polynômes connus

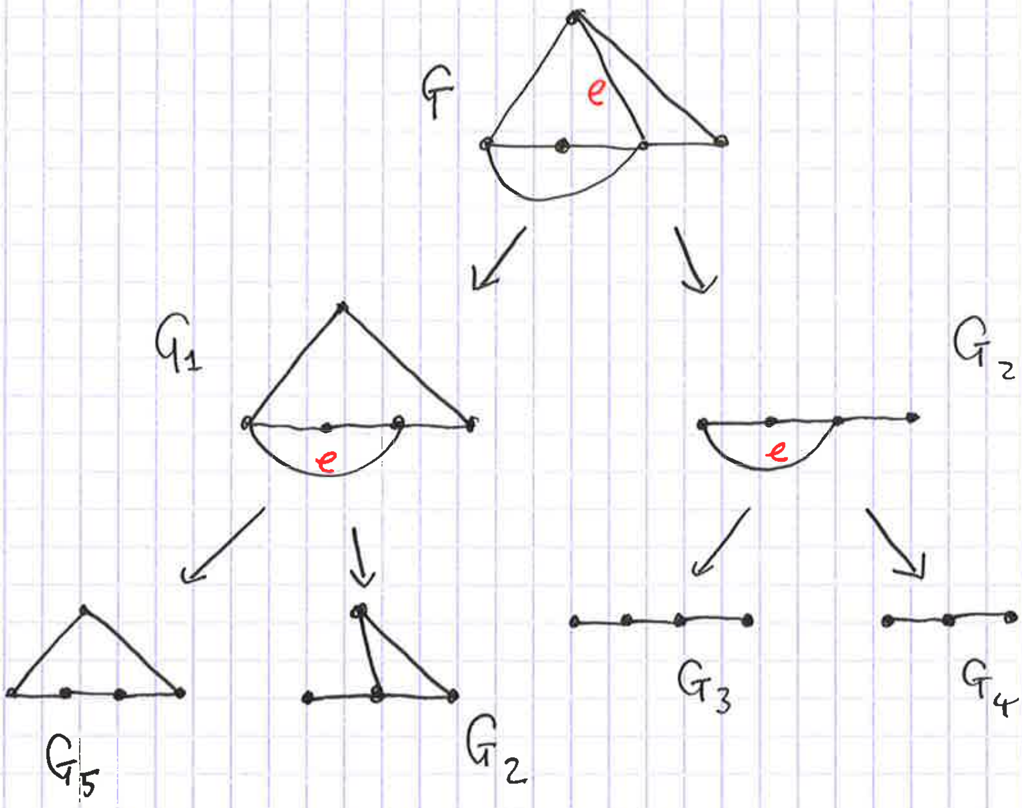
Graphe cyclique

$$P_{C_n} = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$$

arbre d'ordre n

$$P_{A_n} = k(k-1)^{n-1}$$

$$P_G = P_{G-e} - P_{G/e}$$



$$P_{G_5} = P_{C_5} = (k-1)^5 - (k-1) \quad , \quad P_{G_3} = P_{A_4} = k(k-1)^3 \quad , \quad P_{G_4} = P_{A_3} = \cancel{(k-1)^3 - (k-1)}\ k(k-1)^2$$

$$P_{G_2} = P_{G_3} - P_{G_4} = k(k-1)^3 - \cancel{(k-1)^3 \pm (k-1)}\ k(k-1)^2 = \cancel{(k-1)^4 \pm (k-1)}\ k(k-1)^2(k-2)$$

$$P_{G_1} = P_{G_5} - P_{G_2} = (k-1)^5 - (k-1) - \cancel{(k-1)^4 - (k-1)}\ k(k-1)^2(k-2)$$

$$P_G = P_{G_1} - P_{G_2} = \cancel{(k-1)^5 - 2(k-1) - (k-1)^4 - (k-1)^4 - (k-1)} = \cancel{(k-1)^5 - 2(k-1)^4 - 3(k-1)}$$

$$\cancel{k(k-1)^2(k-2) - k} \quad (k-1)^5 - (k-1) - 2k(k-1)^2(k-2)$$

$$= (k-1)\left[\cancel{(k-1)^4 - 2(k-1)^3 - 3}\right] \quad (k-1)^4 - 1 - 2k(k-1)(k-2)$$

$$= (k-1)\left[k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 4k - 2k^3 + 6k^2 - 4k\right]$$

$$= (k-1)\left[k^4 - 6k^3 + 12k^2 - 8k\right] = k(k-1)\left[k^3 - 6k^2 + 12k - 8\right]$$

$$= k(k-1)(k-2)(k^2 - 4k + 4) = k^5 - 7k^4 + 18k^3 - 20k^2 + 8k$$

$$= k(k-1)(k-2)^3$$

On sait que $(k-2)$ est facteur car il n'existe pas de coloration avec 2 couleurs. k est aussi facteur

Coefft de $k^4 = -7 = -|A|$

Nombre de colorations avec 3 couleurs $= P_G(3) = 3 \times 2 \times 1 = 6$