

## Arithmétique et applications, graphes et combinatoire

### Cours No. 7, Théorie des graphes : le polynôme chromatique

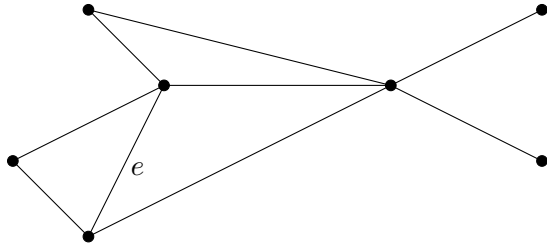
**Définition de  $P_G(k)$**  : Le polynôme chromatique a été introduit par G. D. Birkhoff en 1912 pour étudier le problème des quatre couleurs pour un graphe planaire. Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple d'ordre  $n$  et soit  $k \in \mathbf{N}$ . Une coloration (des sommets) d'un graphe est une application  $\gamma : X \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  (les nombres  $1, \dots, k$  sont les couleurs). La coloration est *propre* si  $x \sim y \Rightarrow \gamma(x) \neq \gamma(y)$ . La fonction chromatique  $P_G(k)$  associée à  $G$  est définie comme le nombre de colorations propres de  $G$  avec  $k$  couleurs. On verra dans la suite qu'il s'agit d'un polynôme de degré  $n$ .

Exemples : 1. Soit  $G = (X, \emptyset)$  le graphe discret d'ordre  $n$ , alors  $P_G(k) = k^n$ .

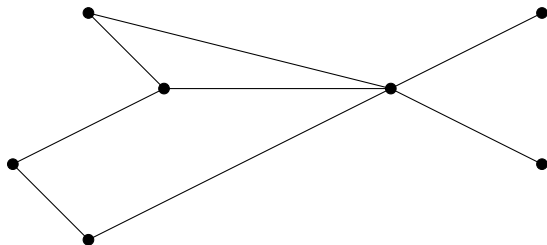
2. Soit  $G = (X, A)$  le graphe linéaire avec  $n$  sommets, alors  $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ .

3. Soit  $G = K_n$  le graphe complet d'ordre  $n$ , alors  $P_G(k) = k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1)$ .

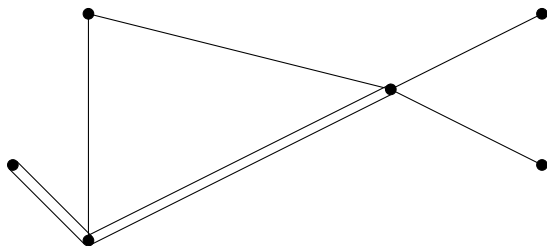
**Deux opérations sur un graphe** : On considère le graphe suivant avec une de ces arêtes indiquée.



On peut d'abord effacer l'arête  $e$  pour obtenir le graphe  $G - e$  :



Sinon, on peut contracter l'arête  $a$  afin d'obtenir le multi-graphe  $G/e$  :



Le théorème suivant donne un lien entre les polynômes chromatiques de ces trois graphes.

Théorème : Soit  $G = (X, A)$  un graphe simple et soit  $e$  une arête de  $G$ . Soient  $G - e$  et  $G/e$  les graphes obtenus de  $G$  en effaçant et en contractant l'arête  $e$  respectivement. Alors  $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$ .

Preuve : On suppose que  $e = \overline{xy}$  pour  $x, y \in X$ . Le nombre de  $k$ -colorations de  $G - e$  pour lesquels  $x$  et  $y$  ont des couleurs différentes est identique avec ou sans l'arête  $e$  et par suite est égale à  $P_G(k)$ . De même, le nombre de  $k$ -colorations de  $G - e$  pour lesquels  $x$  et  $y$  ont la même couleur est identique à  $P_{G/e}(k)$ . On remarque que le graphe  $G/e$  n'est pas nécessairement simple, mais puisque  $x$  et  $y$  sont des sommets distincts, une contraction ne crée pas des boucles. En plus on peut ignorer les arêtes multiples car celles-ci n'ont aucun effet sur le calcul de polynôme chromatique (car des sommets adjacents restent adjacents indépendamment du nombre d'arêtes entre eux). Il s'ensuit que le nombre de  $k$ -colorations de  $G - e$  est  $P_G(k) + P_{G/e}(k)$  d'où le résultat.  $\square$

Corollaire : La fonction chromatique d'un graphe simple est polynomiale.

Preuve : On commence avec un graphe simple  $G$ , puis on choisit une arête comme dans la preuve ci-dessus afin d'obtenir les deux graphes  $G - e$  et  $G/e$  (on peut remplacer les arêtes multiples dans  $G/e$  par des arêtes simples). On continue de la même façon en choisissant des nouvelles arêtes dans  $G - e$  et  $G/e$  pour obtenir quatre nouvelles graphes. Ce processus termine quand tous les graphes qui en résulte sont des graphes discrets dont on connaît le polynôme chromatique ( $k^n$ ). On voit alors que la fonction chromatique est la somme des polynômes donc polynomiale.  $\square$

Remarques : 1. Puisqu'il n'y a aucune coloration d'un graphe avec zéro couleurs, on a toujours  $P_G(0) = 0$  c'est à dire il n'y a pas de terme constante. A part le graphe discret, il n'y a aucune coloration avec une couleur et donc  $P_G(1) = 0$  ; autrement dit la somme des coefficients est nulle.

2. Les coefficients du polynôme chromatique sont de signes alternés et la valeur absolue du coefficient de  $k^{n-1}$  correspond au nombre d'arêtes du graphe.

Exercices : 1. Calculer le polynôme chromatique du graphe cyclique  $C_n$ .

2. Calculer le polynôme chromatique du graphe indiqué comme exemple ci-dessus.

**Référence** : 1. R. Diestel, Graph Theory, Springer 2005.