Arithmétique et applications, graphes et combinatoire

Cours No. 6, Théorie des graphes : graphes eulériens

Dans ce chapitre tous les graphes seront simples. Un chemin (cycle) eulérien est un chemin (cycle) passant une et une seule fois par chaque arête du graphe. Si un graphe admet un cycle eulérien on dit que le graphe est *eulérien*. On applique les algorithmes pour construire des chemins ou des cycles eulériens au bioinformatique afin de reconstruire une suite d'ADN à partir des ses fragements ; aussi à la conception des circuits CMOS pour trouver un ordre optimal pour les portes logiques. Dans la suite on va caractériser les graphes eulériens et donner un algorithme pour construire un cycle eulérien.

Lemme Si dans un graphe G tout sommet est de degré ≥ 2, alors G possède au moins un cycle.

Preuve (algorithme de marquage) : Initialement tous les sommets sont non-marqués. Un sommet est marqué arbitrairement. L'algorithme construit alors une suite $x_1, \dots, x_k$ des sommets marqués en choisissant arbitrairement pour x_{i+1} un sommet non-marqué adjacent à x_i. L'algorithme s'arête lorsque x_k ne possède plus de voisin non-marqué. Puisque ce sommet est de degré au moins 2, il possède, outre x_{k-1}, un autre voisin x_j dans la suite $j < k-1$. Alors $\overline{x_k x_j x_{j+1} \dots x_{k-1} x_k}$ est un cycle. $\square$

Lemme : Un graphe G sans cycle à n sommets possède au plus $n-1$ arêtes.

Remarque : Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle : il possède exactement $n-1$ arêtes.

Preuve du lemme : récurrence sur l'ordre de G. Si l'ordre de G égale 1, la propriété est évidente. On suppose vraie jusqu'à l'ordre n et soit $G = (X, A)$ un graphe sans cycle à $n+1$ sommets. Il existe un sommet x de degré au plus 1. Soit $G' = (X', A')$ le sous-graphe d'ordre n induit par les sommets $X' = X \setminus \{x\}$. Le graphe G' est sans cycle et par l'hypothèse de récurrence il possède au plus $n-1$ arêtes. Or $d(x) < 2$ impose que A diffère de A' par au plus une arête de la forme xy. Il s'ensuit que $|A| < n$. $\square$

Théorème : Un graphe connexe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Preuve : Soit $G = (X, A)$ connexe eulérien. Il existe alors un cycle φ parcourant une et une seule fois chaque arête. Soit x un sommet : à chaque fois qu'on passe par lui, on y arrive et on en repart par deux arêtes non encore parcourues, donc le sommet est de degré pair.

Reciproquement, soit G connexe avec tous ses sommets de degré pair. On montre par récurrence sur le nombre d'arêtes de G. Si G se réduit à un seul sommet isolé il est évidemment eulérien. Sinon, tous les sommets de G sont de degré ≥ 2, et par le lemme il existe un cycle φ sur G. On cosidère le sous-graphe H constitué des mêmes sommets et les arêtes en dehors du cycle φ.

Les sommets de H sont également de degré pair, le cycle contenant un nombre pair d'arêtes incidentes pour chaque sommet. Par récurrence, chaque composante connexe H_i de H est un graphe eulérien, et donc admet un cycle eulérien φ_i. Pour reconstruire un cycle eulérien sur G, il suffit de fusionner le cycle φ avec les différentes cycles φ_i : on parcours le cycle φ depuis un sommet arbitraire ; lorsqu'on rencontre pour le première fois un sommet $x \in H_i$, on lui sustitute le cycle φ_i. Le cycle obtenu est eulérien pour G. En effet, le cycle φ est les cycles φ_i forment une partition des arêtes.

□

On remarque que la preuve du théorème donne un algorithme (L'algorithme de Hierholzer) pour construire un cycle eulérien sur un graphe connexe dont tous ses sommets sont de degré pair.