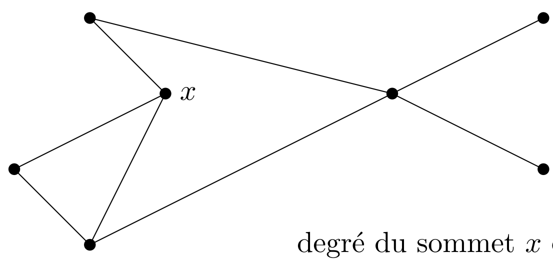
Arithmétique et applications, graphes et combinatoire

Cours No. 4, Théorie des graphes : notions de base

Graphe simple : Un graphe simple G est un couple formé de deux ensembles : un ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, partie de l'ensemble $\mathcal{P}_2(X)$ des parties à deux éléments de X, dont les éléments sont appelés arêtes. On notera $G = (X, A)$. Lorsque $a = \{x, y\} \subset A$, on dit que a est l'arête de G d'extrémités x et y, ou que a joint x et y, ou que a passe par x et y, et on note $a = xy$ (ou parfois $a = \overline{xy}$). Les sommets x et y sont dits adjacents dans G et dans ce cas on note $x \sim y$.

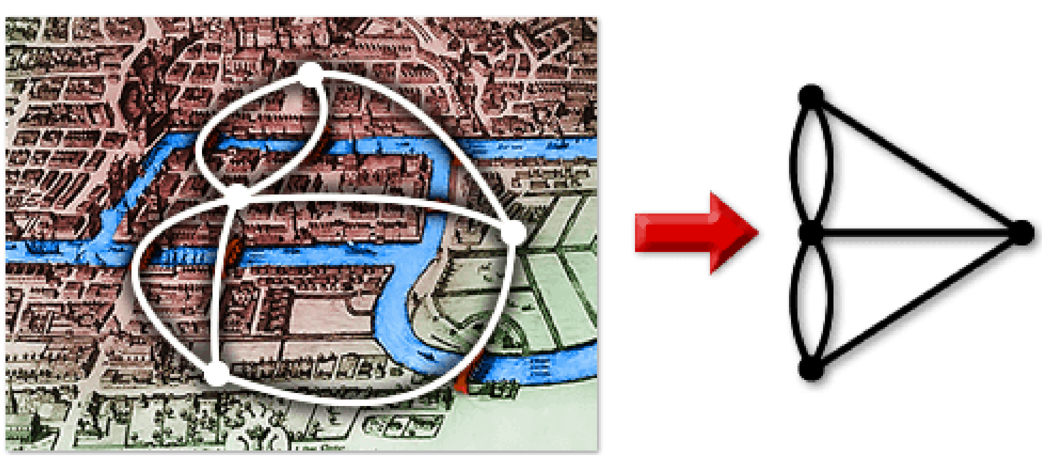
Le degré d'un sommet x est le nombre d'arêtes contenant x, autrement dit, le nombre d'arêtes *incidentes* à x :



degré du sommet x égale 3

Multigraphe : Un multigraphe $G = (X, A, f)$ est déterminé par un ensemble X de sommets, un ensemble (abstrait) A et une application $f : A \to \mathcal{P}_2(X)$. Alors on permet des arêtes multiples dans un multigraphe. Un multigraphe avec boucles est un triplet (X, A, f) où f est une application de A dans $\mathcal{P}_2(X) \cup \mathcal{P}_1(X)$.

Problème des ponts de Königsberg : On dit que la théorie des graphes a commencé avec le problème des ponts de Königsberg considéré par Euler en 1736 :



Dans ce problème on veut trouver un promenade fermé qui traverse tous les ponts exactement une fois. Dans sa formation en termes de graphes, on cherche un chemin qui traverse chaque arête exactement une fois. Un graphe admettant cette propriété est appelé un graphe eulerien. On peut montrer qu'un graphe connexe est eulerien si et seulement si chaque sommet est de degré paire.

Exemples de graphes : 1. Le graphe d'un tournoi $T = (X, A)$, où X est l'ensembles des participants et A est l'ensemble des paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi.

2. Le graphe d'un réseau social $S = (X, A)$, où X est l'ensembles de membres et A est l'ensemble des paires d'amis.

3. Le graphe discret d'ordre n, $D_n = (X, \emptyset)$.

4. Le graphe complet d'ordre n, K_n, où $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $A = \mathcal{P}_2(X)$.

5. Le graphe biparti K_{pq} où $X = \{x_1, x_2, \ldots x_p, y_1, y_2, \ldots m y_q\}$ et $A = \{\{x_i, y_j\} : 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}$.

6. Le cycle C_n, où $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.

7. Le graphe linéaire L_n, oì $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ et $A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}\}$.

Terminologie : Pour un graphe $G = (X, A)$, le cardinal $|X|$ de X s'appelle l'ordre du graphe. Le degré d'un sommet x, noté $d(x)$, est le nombre d'arêtes incidentes à x. Un graphe simple est dit régulier de degré r lorsque tous ses sommets sont dfe degré r.

Lemme des poignées de mains : Soit $G = (X, A)$ un graphe simple, alors

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|A|\,.$$

En effet, chaque paire $\{x, y\} \in A$ est comptée deux fois, une fois pour $d(x)$ et une fois pour $d(y)$.

Exercices : 1. Montrer qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impaire.

2. Est-il possible de relier 15 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit lié avec exactement trois autres ?

Graphes orientés : Un graphe orienté G est formé de deux ensembles : un ensemble $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de sommets et un ensemble $A \subset X \times X$ de arcs. Si $a = (x, y)$ est un arc de G, x est l'extrémité initiale de a et y l'extrémité finale de a.

A tout graphe orienté $G = (X, A)$ on associe le graphe simple (X, B) où $\{x, y\} \in B \Leftrightarrow (x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$.

Soit x un sommet d'un graphe orienté. On note $d^+(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale, et $d^-(x)$ le nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale. Ainsi on a $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

Exercice : Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté, montrer que

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x)\,.$$

Terminologie :

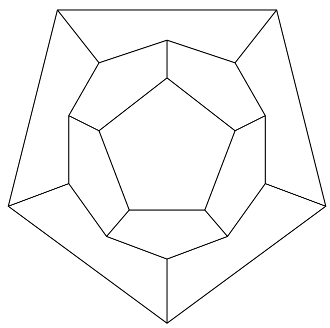
- Sous-graphe : $H = (Y, B)$ est un sous-graphe de $G = (X, A)$ si $Y \subseteq X$ et $B \subseteq A$.
- Graphe partiel : $H = (Y, B)$ est un graphe partiel de $G = (X, A)$ si $Y = X$ et $B \subset A$.
- Ordre d'un graphe : le nombre de sommets de ce graphe.
- Chaîne : suite finie de sommets reliés entre eux par une arête.
- Chaîne simple : chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête.
- Chaîne eulérienne : chaîne simple passant par toutes les arêtes d'un graphe.
- Chaîne hamiltonienne : chaîne simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois.
- Cycle : chaîne qui revient à son point de départ.
- Cycle eulérien : cycle simple passant par toutes les arêtes d'un graphe une et une seule fois.
- Cycle hamiltonien : cycle simple passant par tous les sommets d'un graphe une et une seule fois.
- Graphe connexe : pour toute paire de sommets, il existe une chaîne entre eux.
- Arbre : graphe simple connexe sans cycle.
- Graphe eulérien : graphe qui possède un cycle eulérien.
- Graphe semi–eulérien : graphe qui possède une chîne eulérienne.
- Graphe hamiltonien : graphe qui possède un cycle hamiltonien.
- Graphe semi–hamiltonien : graphe qui possède un chaîne hamiltonienne.
- Graphe valué : graphe où des réels sont associés aux arêtes.
- Graphe pondéré : graphe valué dont tous les réels sont positifs ou nuls. Ces nombres sont les poids des liaisons (arêtes ou arcs) entre les sommets.
- Longueur d'une chaîne : nombre d'arêtes qui composent la chaîne.
- Valuer d'une chaîne : somme des valeurs des arêtes (arcs) d'une chaîne d'un graphe valué.
- Distance entre deux sommets : longueur de la plus courte chaîne joignant ces deux sommets.
- Diamètre d'un graphe : maximum des distances entre les sommets d'un graphe.
- Indice chromatique : nombre minimal de couleurs permettant de colorier les arêtes d'un graphe de telle sorte que deux arêtes adjacentes n'aient pas la même couleur.

• Nombre chromatique d'un graphe : nombre minimal de couleurs permettant de colorier les sommets d'un graphe de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur.

• Graphe planaire : graphe qui se représente sur un plan sans qu'aucune arête (ou arc pour un graphe orienté) n'en croise une autre.

• Graphe fini (infini): graphe dont le nombre de sommets est fini (infini). Dans ce cours on ne considéra que les graphe finis.

Exercice : Montrer que le graphe planaire suivant contient une chaine hamiltonienne.



Homomorphismes de graphes : Soient $G = (X, A)$ et $H = (Y, B)$ deux graphes simples. Une application $\varphi : X \to Y$ est un homomorphisme de G dans H si $x \sim y \Rightarrow \varphi(x) \sim \varphi(y)$. L'application φ est un isomorphisme si φ est une bijection et $x \sim y \Leftrightarrow \varphi(x) \sim \varphi(y)$. En général, on s'iinteresse à des propriétés des graphes à isomorphisme près.

Matrice d'adjacence : Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté avec $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. La matrice d'adjacence de G est la $(n \times n)$–matrice $M(G)$ dont les coefficients m_{ij} sont définis par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

Pour un graphe non-orienté on peut également définir sa matrice d'adjacence par $m_{ij} = m_{ji} = 1$ si et seulement si $\{x_i, x_j\} \in A$. Il s'agit d'une matrice symétrique.

Propriétés : On suppose $G = (X, A)$ un graphe orienté

1. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} d^+(x_i) &= \textstyle\sum_{j=1}^n m_{ij} \\ d^-(x_i) &= \textstyle\sum_{j=1}^n m_{ji} \\ \textstyle\sum_{i,j} m_{ij} &= \textstyle\sum_{i=1}^n d^+(x_i) = \sum_{i=1}^n d^-(x_i) = |A| \end{aligned}$$

2. La trace de $M(G)$ est égale au nombre de boucles.

Théorème : Soit $G = (X, A)$ un graphe orienté de matrice d'adjacence M. Notons les coefficients de M^k par $m_{ij}^{(k)}$. Alors $m_{ij}^{(k)}$ est égal au nombre de chemins de longueur k du sommet x_i au sommet x_j.

Preuve : Récurrence sur k : $m_{ij}^{(1)} = m_{ij}$ est bien le nombre de chemins de longueur 1 allant de x_i à x_j. On suppose le résultat vrai pour l'entier $k-1$. Comme $M^k = M^{k-1} \times M$ on a

$$m_{ij}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} m_{i\ell}^{(k-1)} m_{\ell j}$$

Par hypothèse de récurrence $m_{i\ell}^{(k-1)}$ est le nombre de chemins de longueur $k-1$ allant de x_i à x_ℓ et $m_{\ell j}$ est égal à 1 si (x_ℓ, x_j) est une arête de G et à 0 sinon. $m_{i\ell}^{(k-1)} m_{\ell j}$ est donc le nombre de chemins de longueur k allant de x_i à x_j passant par x_ℓ, ce qui donne le résultat. $\square$

Ce théorème reste vrai pour des graphes non-orientés. On remarque que la trace de M^k donne le nombre de circuits de longueur k dans G.

Spectre d'un graphe : Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. La matrice laplacienne de G est la matrice $L(G) = D - M(G)$ où D est la matrice des degrés et $M(G)$ est la matrice d'adjacence. Plus spécifiquement :

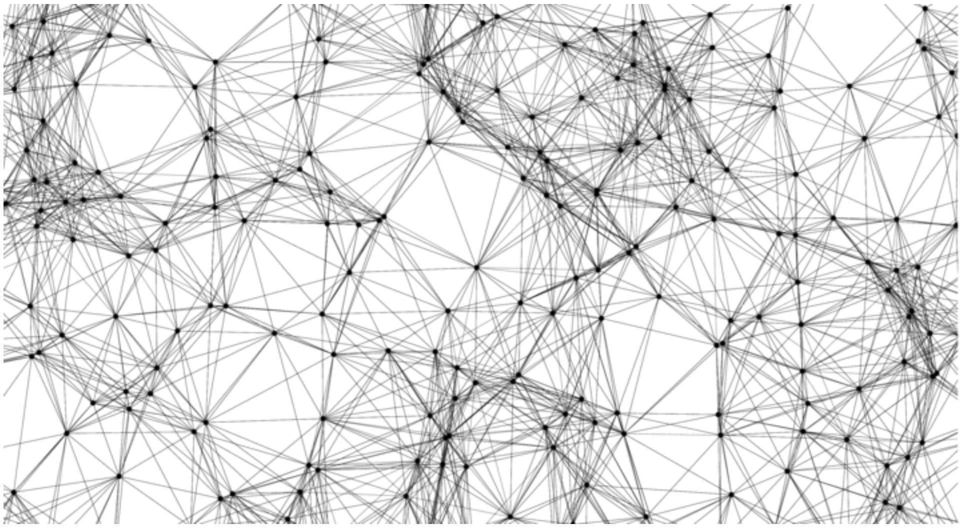
$$l_{ij} = \begin{cases} d(x_i) & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in A \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Il s'agit d'une matrice symétrique avec n valeurs propres $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$ (le *spectre du graphe*) dont $\lambda_0 = 0$; en effet le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ est vecteur propre associé au valeur propre 0. La somme de chaque ligne et chaque colonne est nulle. La multiplicité de la valeur propre 0 est égale au nombre des composantes connexes du graphe. La plus petite valeur propre non-nulle s'appelle le *gap spectral* du graphe.

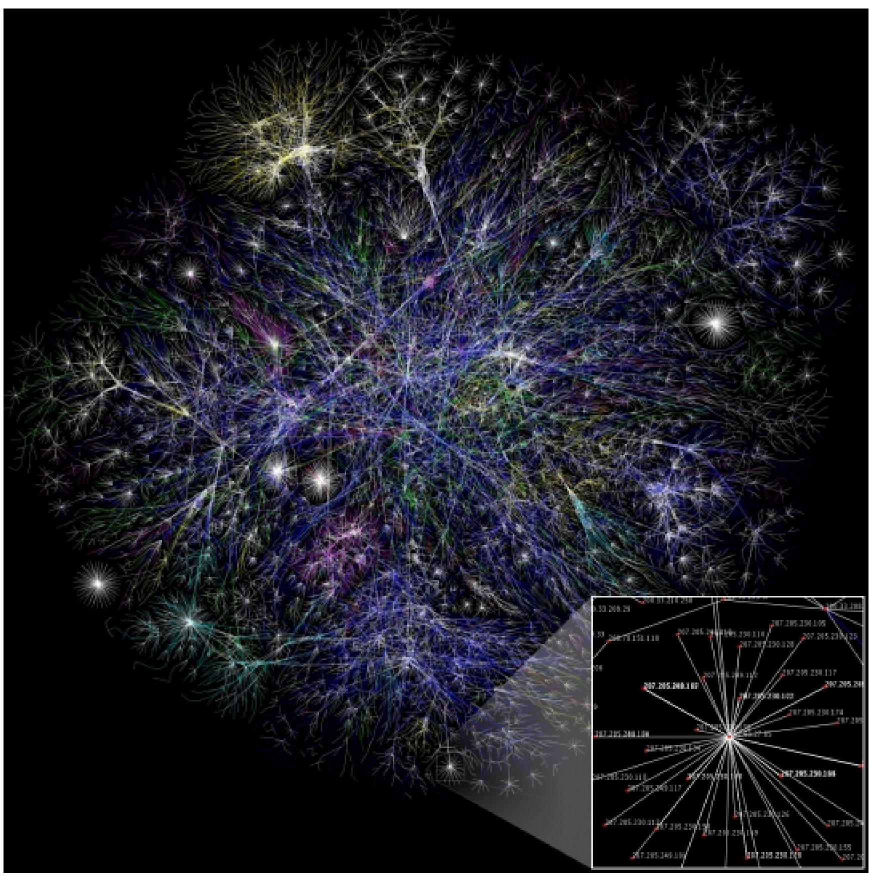
Parfois on normalise cette matrice en $\widehat{L} = D^{-1}L = I - D^{-1}M(G)$. Dans ce cas tous les valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0, 2]$ (exercice : montrer ce fait).

Systémes complexes : Plusieurs systèmes complexes sont représentés par un graphe:

Réseau de neurones :



Internet :



Un des problèmes importants dans la théorie des systèmes complexes et de comprendre comment l'ordre émerge du désordre. Les exemples ci-dessus sont des graphes *sans échelle*, qu'on discutera vers la fin du cours.

Référence : 1. R. Diestel, Graph Theory, Springer 2005.

2. E. Sigward, Introduction à la théorie des graphes, internet.