*Département de Mathématiques* Année Universitaire 2016–17

L3 Maths, DMAT6ARA : Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

Jeudi 11 mai 2017 13h30. Durée : 3 heures

ARITHMÉTIQUE ET APPLICATIONS, COMBINATOIRE ET GRAPHES

aucun document autorisé

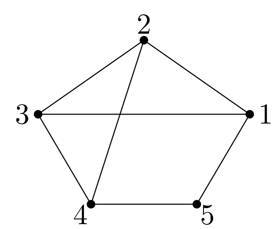
usage de calculatrices interdit, tous les calculs se font à la main

chaque réponse devra être justifiée

**Quelques petites questions pour commencer :**

**1.** Montrer que $f(x) = x^2+x+2$ est primitive dans $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})[x]$ mais pas dans $(\mathbf{Z}/7\mathbf{Z})[x]$.

**2.** Calculer la matrice d'adjacence du graphe suivant :




Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet 1 au sommet 3.

**3.** Soit $C$ le code $\{(00000000), (11110001), (00111110), (11001111)\}$. Quelle est la distance minimale pour ce code ? Pour quel $t$ est ce code $t$-correcteur ? On reçoit le vecteur $r = (11100011)$. Est-il corrigible pour ce code ? Si oui, le corriger.

**4.** Donner un graphe avec un polynôme chromatique égale à $(x-2)(x-1)^2x$.

**Question sur les corps finis et les codes BCH :**

**5.** Soit $p(x) = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

(a) Montrer que $p(x)$ est irréductible. Combien d'éléments y a-t-il dans le corps $K = \mathbb{F}_2[x]/(p(x))$ ? Calculer l'inverse multiplicative de $x^2 + 1$ dans $K$.

(b) Montrer que $p(x)$ est primitif.

(c) Utiliser $p(x)$ pour construire le polynôme générateur d'un code BCH de distance construite $s = 2$ sur $\mathbb{F}_2$. Calculer le polynôme générateur $g(x)$ pour ce code. Il s'agit d'un code linéaire de quelle dimension ?

(d) Un mot $c$ est transmis avec ce code et on reçoit le vecteur $r = (1101010) \in {\mathbb{F}_2}^7$ ce qui correspond au polynôme $r(x) = 1 + x + x^3 + x^5 \in \mathbb{F}_2[x]$. Calculer les syndromes $r_1, r_2$, puis calculer le polynôme localisateur d'erreurs. Corriger le vecteur $r$ afin de trouver le mot $c$.

SUITE...

**Question sur les codes correcteurs :**

**6.** (a) Construire le $[7,3]$-code linéaire $C$ avec matrice génératrice :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Calculer la matrice de contrôle $H$ pour $C$.

(c) Pour quel $t$ est ce code $t$-correcteur ?

(d) Calculer les syndromes associés aux erreurs de poids $\leq t$.

(e) Parmi les vecteurs reçus $r_1 = (1001100), r_2 = (1100111), r_3 = (1111110)$, lesquels sont corrigibles par la méthode des syndromes ?

(Un $[n,k]$-code linéaire corréspond à un sous-espace de dimension $k$ dans $\mathbb{F}_2{}^n$)

**Question sur les graphes :** Le nombre de Ramsey $R(k,\ell)$ est le plus petit entier $n$ tel que toute coloration par deux couleurs, rouge/bleue, des arêtes d'un graphe complet $K_n$ contient soit un sous-graphe $K_k$ rouge soit un sous-graphe $K_\ell$ bleu.

**7.** L'objectif de cette question est de montrer que le nombre de Ramsey $R(3,5) = 14$. Montrer d'abord que $R(3,5) \leq 14$ (vous pouvez supposer que $R(3,4) = 9$).

On doit ensuite montrer qu'il existe une coloration rouge/bleue de $K_{13}$ qui ne contient ni un triangle rouge ni un $K_5$ bleu. Vous pouvez utiliser votre propre raisonement, mais on propose la méthode suivante.

• Identifier les sommets de $K_{13}$ avec les éléments de $\mathbb{F}_{13} = \mathbf{Z}/13\mathbf{Z} = \{0, 1, \ldots, 12\}$.
• Calculer toutes les résidus cubiques modulo 13, c'est à dire toutes les possibilités $x^3 \mod 13$ où $x \in \mathbf{Z}$. On note cet ensemble par $R \subset \mathbb{F}_{13}$. On remarque que $1 \in R$ et $-1 \in R$ (en identifiant $-1 = 12 \mod 13$).
• On définit alors la coloration suivante de $K_{13}$ : l'arête $\{i,j\}$ $(i \neq j)$ est coloriée rouge si et seulement si $i - j \in R$ (on remarque que $i - j \in R \Leftrightarrow j - i \in R$).
• On montre que cette coloration ne contient aucun triangle rouge.
• Ensuite on montre que cette coloration ne contient aucun $K_5$ bleu. Pour ça on choisit 5 sommets. On peut supposer par symétrie que 0 est un des sommets choisis. Alors, si un des autres sommets choisis fait parti de $R$, il existe une arête rouge (pourquoi?), donc si on veut construire un $K_5$ blue on doit éviter $R$. En plus, si deux sommets choisis sont consécutifs modulo 13 on aurait une arête rouge (pourquoi ?)... Conclure.

FIN