Géométrie algébrique

§3. La topologie de Zariski, irréductibilité et dimension

On se rappelle qu'on peut définir une topologie sur un ensemble X en précisant les ensembles fermés, quitte à vérifier les conditions suivantes :

(i) l'ensemble vide et X sont fermés ;

(ii) une intersection quelconque des fermés est fermée ;

(iii) une réunion finie de fermés est fermée.

D'autres propriétés à rappeler :

• un ensemble est ouvert si son complémentaire est fermé ;

• soit Y un sous-ensemble de X, alors Y est muni de la topologie induite de celle de X si et seulement si l' ensemble $Y \cap Z$ est fermé lorsque Z est fermé dans X.

Définition : On considère l'espace affine $\mathbb{K}^n$. La topologie de Zariski sur $\mathbb{K}^n$ est la topologie pour laquelle les ensembles fermés sont exactement les ensembles algébriques. On vérifie aisement que c'est bien une topologie. Si $X \subset \mathbb{K}^n$, alors la topologie de Zariski sur X est la topologie induite par la topologie de Zariski sur $\mathbb{K}^n$.

Des conséquences :

• tout fermé dans $\mathbb{K}^n$ doit satisfaire au moins une équation polynomiale non-triviale et donc sa dimension est inférieure à n ;

• l'intersection de deux ouverts non-vides est toujours non-vide ;

• les fermés dans $\mathbb{K}$ sont exactement les sous-ensembles finis.

Exemple : L'ensemble algébrique $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ est la réunion des deux ensembles $X_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_1 = 0\}$ et $X_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 : x_2 = 0\}$, chacun algébrique. L'ensemble X est réductible dans le sens qu'on définira dans la suite.

Définition : Un espace topologique X est *réductible* si on peut l'écrire comme une réunion $X = X_1 \cup X_2$ où X_1 et X_2 sont fermés propres non-vides de X. Sinon on dit que X est *irréductible*. Un ensemble algébrique irréductible dans $\mathbb{K}^n$ est appellé une *variété algébrique*.

Idéaux premiers : On considère l'anneau des entiers $\mathbf{Z}$. Alors pour $k \in \mathbf{Z}$, le sous-ensemble $k\mathbf{Z} = \{kx : x \in \mathbf{Z}\}$ est un idéal. Le quotient $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z}_k := \{0, 1, \ldots, k-1\}$ avec multiplication et sommation $\mod k$. On sait que k est premier si et seulement si il n'existe pas de diviseurs de zéro dans $\mathbf{Z}_k$, c'est à dire deux éléments $a, b \in \mathbf{Z}_k$ tels que

$ab = 0 \mod k$. Alors la notion d'idéal premier généralise cette notion à tout anneau commutatif.

Définition : Soit R un anneau commutatif. Alors $I \lhd R$ est *premier* si le quotient R/I est un anneau intègre (un anneau commutatif unitaire différent de l'anneau nul qui ne possède aucun diviseur de zéro, c'est à dire $\forall a, b \in R/I,\ a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$).

Si $I \lhd R$ est premier et $I = J \cap K$ avec $J, K \lhd R$, il s'ensuit que soit $I = J$ soit $I = K$. Sinon, il existent $a \in J \setminus I$ et $b \in K \setminus I$; en plus $ab \in J \cap K = I$. Il s'ensuit que $[a], [b] \in R/I$ sont non-nuls et vérifient $[a] \cdot [b] = [0]$ dans R/I et donc sont diviseurs de zéro.

Lemme : *Un ensemble algébrique $X \subset \mathbb{K}^n$ est une variété affine si et seulement si son idéal $I(X) \subset \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est premier.*

Preuve : Supposons $I(X)$ est premier et que $X = X_1 \cup X_2$. Alors $I(X) = I(X_1) \cap I(X_2)$. Puisque I est premier il s'ensuit que $I(X) = I(X_1)$ disons, d'où $X = X_1$ (car $V(I(X)) = X$)

Reciproquement, supposons X irréductible et soit $fg \in I(X)$. Alors $X \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$, d'où $X = (V(f) \cap X) \cup (V(g) \cap X)$ est la réunion de deux ensembles algébriques. Puisque X est irréductible, on peut supposer que $X = V(f) \cap X$, d'où $f \in I(X)$. q.e.d.

Définition : Un ensemble topologique s'appelle *noethérien* si chaque chaîne décroissante $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ de sous-ensembles fermés est stable.

Le fait que $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est noethérien se traduit au fait que chaque ensemble algébrique est un espace topologique noethérien.

Proposition : *Chaque espace topologique noethérien X est la réunion finie $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$ d'ensembles fermés irréductibles. Si l'on suppose que $X_i \not\subset X_j$ pour tout $i \neq j$, alors les X_i sont uniques (à une permutation près). On les appelle les composantes irréductibles de X. En particulier tout ensemble algébrique est la réunion finie de variétés affines et cette décomposition est unique.*

Preuve : Supposons au contraire qu'il existe un espace topologique noethérien X qui contredit la conclusion. En particulier X est réductible : $X = X_1 \cup X_1'$, et en plus l'affirmation de la proposition est fausse pour au moins un de ces sous-ensembles, disons X_1. On continue de cette manière en construisant une chaîne $X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \cdots$ d'ensembles fermés, ce qui contredit l'hypothèse que X est noethérien.

Pour l'unicité, on suppose deux décompositions : $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r = X_1' \cup \cdots \cup X_s'$. Alors $X_1 \subset \cup_i X_i'$, d'où $X_1 = \cup_i (X_1 \cap X_i')$. Mais X_1 est irréductible, donc on peut supposer que $X_1 = X_1 \cap X_1'$, c'est à dire que $X_1 \subset X_1'$. Par la même raisonnement on conclut qu'il existe un i tel que $X_1' \subset X_i$. Il s'ensuit que $X_1 \subset X_1' \subset X_i$ et nécessairement $i = 1$. Donc $X_1 = X_1'$. On continue par récurrence en posant $Y = \overline{X \setminus X_1}$. q.e.d.

On applique l'idée suivante afin de définir la dimension à partir de la topologie de Zariski : Soit X un espace irréductible, alors tout fermé propre de X est de dimension strictement inférieure.

Définition : Soit X un espace topologique irréductible non-vide. Alors la *dimension* de X est le plus grand entier n tel qu'il existe une chaîne $0 \neq X_0 \subsetneq X_1 \cdots \subsetneq X_n = X$ de fermés irréductibles de X. Si X est un espace topologique noethérien, alors la *dimension* de X est le suprememum de ses composantes irréductibles. Un espace de dimension 1 s'appelle une courbe, de dimension 2 une surface...

La dimension de $\mathbb{K}^1$ est 1, car les points sont les seuls sous-ensembles propres irréductibles. Puisqu'on a les inclusions $\mathbb{K}^0 \subsetneq \mathbb{K}^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{K}^n$ on voit que la dimension de $\mathbb{K}^n$ est $\geq n$. On peut montrer que c'est bien n.

Exercices : 1. Soient $X_1, X_2 \subset \mathbb{K}^n$ ensembles algébriques. Montrer que

(i) $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$;

(ii) $I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}$.

Trouver un exemple des ensembles algébriques X_1, X_2 tels que $I(X_1 \cap X_2) \neq I(X_1) + I(X_2)$. Donner une interprétation géométrique.

2. Soit $X \subset \mathbb{K}^3$ la réunion des trois axes coordonnées. Déterminer des générateurs de l'idéal $I(X)$. Montrer qu'il faut au moins trois éléments pour l'engendrer.

3. Soit $X \subset \mathbb{K}^3$ l'ensemble algébrique donné par les équations ${x_1}^2 - x_2 x_3 = x_1 x_3 - x_1 = 0$. Trouver les composantes irréductibles de X. Quels sont les idéaux premiers correspondants ?

4. Soit $X = \{(t, t^3, t^5) : t \in \mathbb{K}\} \subset \mathbb{K}^3$. Montrer que X est une variété affine de dimension 1 et calculer $I(X)$.

5. Soit $X \subset \mathbb{K}^2$ un ensemble algébrique irréductible. Montrer que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $X = V(0)$, c'est à dire $X = \mathbb{K}^2$;
- $X = V(f)$ pour un polynôme irréductible $f \in \mathbb{K}[x, y]$;
- $X = V(x - a, y - b)$ pour $a, b \in \mathbb{K}$, c'est à dire X est un point.

En déduire que la dimension de $\mathbb{K}^2$ est 2 (indication : montrer que l'ensembles de zéros des deux polynômes sans facteurs communes est fini).