Géométrie algébrique

§1. Quelques questions

1. Une droite dans $\mathbf{C}P^n$ est l'image par la projection canonique $\pi : \mathbf{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}P^n$ d'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{n+1}$ de dimension 2.

(i) Montrer qu'il y a une droite unique passant par deux points distincts de $\mathbf{C}P^n$. Paramétrer la droite passant par les deux points $[1,0,0,0]$ et $[a,b,c,d]$ ($[a,b,c,d] \neq [1,0,0,0]$) dans $\mathbf{C}P^3$. Quel est l'image de cette droite dans l'espace affine $\mathbf{C}^3 \hookrightarrow \mathbf{C}P^3$, par la reciproque de l'application $(x_1, x_2, x_3) \mapsto [1, x_1, x_2, x_3, x_4]$.

(ii) Montrer que toute droite est une variété algébrique.

(iii) Montrer qu'il existe une transformation projective qui applique chaque droite dans la droite $\{[x, y, 0, \ldots, 0] \in \mathbf{C}P^n\}$. En déduire que toute droite est isomorphe à $\mathbf{C}P^1$.

(iv) Montrer que dans $\mathbf{C}P^2$ deux droites distints s'intersectent en un point unique. Montrer que la déprojectivisation d'une droite dans $\mathbf{C}P^2$ est une droite affine. Est ce que c'est toujours le cas que deux droites affines s'intersectent dans $\mathbf{C}^2$?

2. Soit C une conique dans $\mathbf{C}P^2$ et soit $p \in C$ un point non-singulier. Montrer qu'il existe une transformation projective de $\mathbf{C}P^2$ qui applique p dans $[0,1,0]$ et qui applique la droite tangente à C en p dans la droite $z = 0$.

3. (i) Donnés deux hyperplans dans $\mathbf{C}^3$, montrer qu'en général leur intersection est une droite. Quels sont les cas exceptionaux ?

(ii) Soit S la surface:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 : x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3\} \subset \mathbf{C}^3 .$$

Montrer qu'il existe exactement trois plans de $\mathbf{C}^3$ contenues dans S.

(iii) On observe que l'équation qui définie S est homogène de degré trois, d'où elle détermine une courbe projective C dans $\mathbf{C}P^2$. Montrer que les trois plans de la partie (ii) corréspondent à trois droites dans C. Expliciter ces droites et pour chaque paire détérminer leur point d'intersection.

4. (i) Donner la définition du radical $\sqrt{I}$ d'un idéal I.

(ii) Soit I un idéal dans un anneau R. Montrer que si $a^n \in I$ et $b^m \in I$ alors $(a+b)^{m+n} \in I$. En déduire que $\sqrt{I}$ est un idéal.

(iii) Trouver un ensemble de générateurs du radical de l'idéal

$$I = ((x^2+y^2)^2(x+y+z-1), (x+y+z-1)^2(x+y+z+1)^2)$$

dans $\mathbf{C}[x,y,z]$.

(iv) Soient X_1 et X_2 deux ensembles algébriques dans $\mathbb{K}^n$. Montrer que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}\,.$$

(v) Donner un exemple de deux ensembles algébriques X_1 et X_2 tels que $I(X_1 \cap X_2) \neq I(X_1) + I(X_2)$.

5. Soit $C \subset \mathbf{C}P^3$ la courbe avec paramétrisation

$$\mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^3 \qquad [s,t] \mapsto [x,y,z,t] = [s^3, s^2t, st^2, t^3]\,.$$

Soit $\vec{p} = [0,0,1,0]$ et soit H le hyperplan défini par $z = 0$. Soit $\varphi : C \to H$ l'application qui à chaque $\vec{x} \in C$ associe le point unique $\varphi(\vec{x}) \in H$ qui est le point d'intersection avec H de la droite unique passant par $\vec{p}$ et $\vec{x}$.

(i) Montrer que H s'identifie avec $\mathbf{C}P^2$.

(ii) Déterminer l'équation de la courbe $\varphi(C)$ dans $H \cong \mathbf{C}P^2$.

(iii) Est-ce-que $\varphi : C \to \varphi(C)$ est birationelle ?

6. (i) Donner la définition de composante irréductible d'une variété algébrique.

(ii) Montrer que le polynôme $P = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbf{R}[x,y]$ est un polynôme irréductible mais que $V(P)$ est réductible. Est-ce-que c'est le cas que tout polynôme irréductible dans $\mathbf{C}[x,y]$ détermine une variété irréductible dans $\mathbf{C}^2$?

(iii) Trouver les composantes irréductible de $V(y^2 - xy - x^2y + x^3)$ dans $\mathbf{R}[x,y]$, puis dans $\mathbf{C}[x,y]$.

(iv) Soit $V = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbf{C}^3 : t \in \mathbf{C}\}$. Trouver $I(V)$ et montrer que V est irréductible.

7. Soit $I = (y^3 - 1) \subset \mathbf{C}[x,y]$.

(i) Trouver $X = V(I)$ et décrire l'anneau des coordonnées $\mathbf{C}[x,y]/I$.

(ii) On considère la fonction $f(x,y) = x$. Montrer que $U = \{(x,y) \in X : f(x,y) \neq 0\}$ est un ouvert dans X par rapport à la topologie de Zariski.

8. (i) Montrer que la courbe $x^2y^3 + x^2z^3 + y^2z^3$ est irréductible dans $\mathbf{C}P^2$; puis, trouver les points singuliers, leurs multiplicités et les tangents en ces points.

(ii) Trouver les points d'interesection et leurs multiplicités des deux courbes :

$$C := (x^2+y^2)z + x^3 + y^3 = 0 \qquad D := x^3 + y^3 - 2xyz = 0\,.$$

(iii) Soit C une courbe projective de degré n définie par le polynôme $P(x,y,z) = \sum_j a_j(x,z)y^{n-j}$. Soit $\vec{x} = [0,1,0]$. Montrer que la multiplicité de C en $\vec{x}$ est le plus petit m tel que $a_m \neq 0$ et que les facteurs de $a_m(x,y)$ déterminent les droites tangentes à C en $\vec{x}$.

9. On suppose donné neuf points dans $\mathbf{C}P^2$ n'appartennant à aucune droite. On suppose que toute droite qui passe par deux de ces points passe par une troisième. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{C}$ et une transformation projective qui applique ces neuf points dans les points

$$[0,1,-1],\ [-1,0,1],\ [1,-1,0],\ [0,1,\alpha],\ [\alpha,0,1],\ [1,\alpha,0],\ [0,\alpha,1],\ [1,0,\alpha],\ [\alpha,1,0]\,.$$

Montrer que nécessairement $\alpha^2 - \alpha + 1 = 0$.

Montrer qu'une courbe projective de degré 3 contient ces neuf points si et seulement si elle est définie par un polynôme de la forme

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3\lambda xyz\,,$$

pour $\lambda \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et que cette courbe est singulière exactement lorsque $\lambda \in \{\infty, -1, \alpha\overline{\alpha}\}$.

10. (i) Montrer qu'il n'existe une seule conique dans $\mathbf{C}P^2$ passant par les cinq points:

$$[0,0,1],\ [0,1,0],\ [1,0,0],\ [1,1,1],\ [1,2,3]\,,$$

Montrer qu'elle est non-singulière.
(ii) Donné cinq points arbitraires dans $\mathbf{C}P^2$, montrer qu' il existe au moins une conique qui contient ces points.
(iii) En déduire que toute courbe projective C de degré 4 dans $\mathbf{C}P^2$ avec quatre points singuliers est réductible (indication : montrer qu'une conique qui contient ces quatre points et un autre point de C a nécessairement une composante en commune avec C).

11. (i) Soit C une courbe projective de degré 3 avec singularité en $[0,0,1]$. Montrer que l'équation de C est de la forme:

$$(\text{quadratique en } x \text{ et } y)z = \text{cubique en } x \text{ et } y\,.$$

(ii) Montrer que par un changement des coordonnées (par transformation projective) l'équation se transforme en

$$y^2 z = \text{cubique en } x \text{ et } y \quad \text{ou} \quad xyz = \text{cubique en } x \text{ et } y\,.$$

En déduire qu'il existe une substitution de la form $z \mapsto \lambda x + \mu y + \nu z$ qui transforme ces equations dans la forme

$$y^z = (x+by)^3 \qquad \text{ou} \qquad xyz = (x+y)^3\,,$$

pour un nombre complexe b.

(iii) Dans chaque cas, en effectuant une substitution de plus, montrer que toute courbe irréductible dans $\mathbf{C}P^2$ est équivalente par transformation projective à une des courbes suivantes :

$$y^2z = x^3 \qquad y^2z = x^2(x+z) \qquad y^2z = x(x-z)(x-\lambda z)\,,$$

pour $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ (ce dernier cas corréspondant au cas d'une courbe non-singulière).

(iv) Quels sont les points singuliers des courbes de la partie (iii) ?

12. Soit Q la quadrique $Q := \{[x_0, x_1, x_2] : {x_0}^2 + {x_1}^2 + {x_2}^2 = 0\} \subset \mathbf{C}P^2$. Est-ce-que l'application $\varphi : \mathbf{C}P^1 \to Q$ donnée par

$$\varphi([x,y]) = [x^2 - y^2, \mathrm{i}(x^2+y^2), 2xy]$$

est birationnelle ?

13. Calculer les points d'intersection (eventuellement à l'infini) avec multiplicités des deux courbes :

$$\begin{cases} C: & 2x^3 + y^3 + y & = & 0 \\ D: & x^3 + y^2 & = & 0 \end{cases}$$

Confirmer le théorème de Bézout.