M1 Géométrie algébrique DMAP8GAL, Mardi 10/05/16 à 13h30

Les notes des cours et des TDs sont autorisées.

Aucun autre document autorisé. Toute réponse doit être justifiée.

Usage de calculettes, d'ordinateurs portables et de téléphones portables interdit.

I. On considère les deux idéaux dans $\mathbf{C}[x,y]$:

$$I = (x^2, y^2-1, xy^2) \quad \text{et} \quad J = (x, y-1, xy)\,.$$

(i) Montrer que $I \subsetneq J$.

(ii) Trouver les ensembles algébriques $V(I)$ et $V(J)$.

(iii) Est-ce-qu'il y a un autre idéal I' avec $I \subsetneq I'$ pour lequel $V(I) = V(I')$?

(iv) Expliciter le radical $\sqrt{I}$ de I.

(v) Soient X_1 et X_2 deux ensembles algébriques dans $\mathbf{C}^n$. Montrer que

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}\,.$$

(vi) Soient X_1 et X_2 les deux ensembles algébriques dans $\mathbf{C}^2$:

$$\begin{aligned} X_1 &: \; x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ X_2 &: \; x^2 - y^2 - 1 = 0\,. \end{aligned}$$

Expliciter l'idéal $I(X_1 \cap X_2)$. Montrer que $I(X_1 \cap X_2) \neq I(X_1) + I(X_2)$.

II. (i) Donnés deux plans dans $\mathbf{C}^3$, montrer qu'en général leur intersection est une droite. Quels sont les cas exceptionaux ? [Un plan dans $\mathbf{C}^3$ est un sous-ensemble d'équation : $ax + by + cz = d$].

(ii) Soit S la surface:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbf{C}^3 : x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3\} \subset \mathbf{C}^3\,.$$

Montrer qu'il existe exactement trois plans de $\mathbf{C}^3$ contenus dans S (d'abord on montre qu'un tel plan est homogène).

(iii) On observe que l'équation qui définie S est homogène de degré trois, d'où elle détermine une courbe projective C dans $\mathbf{C}P^2$. Montrer que les trois plans de la partie (ii) corréspondent à trois droites dans C. Paramétrer chacune de ces droites et trouver le point d'intersection de chaque paire.

SUITE...

III. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ les deux courbes algébriques dans $\mathbf{C}^2$ définies par les équations :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &: \ x^4 + 3xy^3 + y^2 = 0 \\ \mathcal{D} &: \ y^2 - x^2 = 0\,. \end{aligned}$$

(i) Montrer que $(0,0)$ est un point singulier pour chaque courbe. Calculer les droites tangentes à chaque courbe en $(0,0)$.

(ii) Calculer la multiplicité d'intersection au point $(0,0)$.

(iii) Calculer tous les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ (même à l'infini s'il y en a) avec leurs multiplicités. Confirmer le théorème de Bézout.

FIN