Géométrie algébrique – Écrit – 10/05/16 – solutions.

I $\quad I = (x^2, y^2-1, xy^2)$, $J = (x, y-1, xy)$.

(i) Pour montrer $I \subseteq J$ il suffit de montrer que $x^2, y^2-1, xy^2 \in J$

Mais $x^2 = x \times x \in J$, $y^2-1 = (y+1)\times(y-1) \in J$, $xy^2 = y \times xy \in J$

d'où $I \subseteq J$.

On remarque que $V(I) = \{(0, \pm 1)\}$ et $V(J) = \{(0,1)\}$

Puisque $V(I) \neq V(J)$ ~~on ne peut pas~~, alors $I \neq J$.

(ii) $V(I) : \{(0, \pm 1)\}$, $V(J) = \{(0,1)\}$

En effet pour $V(I)$: il faut $x = 0$, puis $y^2-1 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ et puis $xy^2 = 0$

Pour $V(J)$: $x = 0$, $y = 1$, puis $xy = 0$.

(iii) On remarque que $x = xy^2 - x(y^2-1) \in I$.

Il s'ensuit que $I = (x, y^2-1)$

En plus $\sqrt{I} = I$ car, on a toujours $I \subset \sqrt{I}$, mais si $f \in \sqrt{I}$, f annule les deux points $(0, \pm 1)$

$\Rightarrow$ ~~$f(x) = x(y-1)(y+1)g(x,y)$, pour $g \in \mathbb{C}[x,y]$~~

~~$\Rightarrow f(x) \in I$~~

soit f est multiple de x, soit f est multiple de y^2-1.

D'autre part ~~$V(I)$~~ $I(V(I)) = \sqrt{I}$ et $I(V(I')) = \sqrt{I'}$

d'où $\sqrt{I} = \sqrt{I'}$ (car $V(I) = V(I')$)

Puisque $I \subset \sqrt{I}$ et $I' \subset \sqrt{I'} = \sqrt{I}$, si on avait $I \subsetneq I'$ avec $V(I) = V(I')$ on aurait

$$I \subsetneq I' \subseteq \sqrt{I'} = \sqrt{I}$$ ce qui est incohérent avec $I = \sqrt{I}$

Réponse : Non

(iv) $\sqrt{I} = I$ (voir réponse à (iii))

(v) Par hypothèse X_1 et X_2 sont algébriques, donc il existe des idéaux I_1, I_2 avec $X_1 = V(I_1)$ et $X_2 = V(I_2)$

D'abord, on montre que $V(I_1 + I_2) = V(I_1) \cap V(I_2) = X_1 \cap X_2$

En effet

$x \in V(I_1 + I_2) \Leftrightarrow g(x) + h(x) = 0 \quad \forall g \in I_1, h \in I_2$

En particulier $g(x) = 0 \quad \forall g \in I_1$ et $h(x) = 0 \quad \forall h \in I_2$

$\Rightarrow x \in V(I_1)$ et $x \in V(I_2) \Rightarrow x \in V(I_1) \cap V(I_2)$

Inversement; si $x \in V(I_1) \cap V(I_2)$, alors

$$\forall g \in I_1,\ g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall h \in I_2,\ h(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall g \in I_1 \text{ et } \forall h \in I_2,\ (g+h)(x) = 0$$
$$\Rightarrow x \in V(I_1 + I_2)$$

Enfin

$$\sqrt{I_1 + I_2} = I\left(V(I_1+I_2)\right) = I(X_1 \cap X_2)$$

(vi). $I(X_1) = (x^2+y^2-1)$, $I(X_2) = (x^2-y^2-1)$.

$$X_1 \cap X_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2-1 = 0 = x^2-y^2-1\}$$
$$= \{(\pm 1, 0)\}$$

$$I(X_1 \cap X_2) = (x^2-1, y)$$

$$I(X_1) + I(X_2) = \{u(x^2+y^2-1) + v(x^2-y^2-1) \mid u, v \in \mathbb{C}[x,y]\}$$

Il est impossible d'exprimer y sous la forme

$$y = u(x,y)(x^2+y^2-1) + v(x,y)(x^2-y^2-1).$$

par contre y^2 fait bien partie de $I(X_1) + I(X_2)$.

II (i) Un plan dans $\mathbb{C}^3$ est déterminé par une équation du type
$ax + by + cz = d$. $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.

Deux plans: $\begin{cases} ax+by+cz = d & (a,b,c) \neq (0,0,0) \\ a'x+b'y+c'z = d' & (a',b',c') \neq (0,0,0) \end{cases}$

Sans perdre la généralité, on peut supposer que $a \neq 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{a}(d - by - cz)$

$$\Rightarrow y(ab' - a'b) + z(ac' - a'c) = ad' - a'd.$$

Si au moins un parmi $ab'-a'b$ et $ac'-a'c$ sont non-nuls, disons $ab'-a'b \neq 0$

Alors on pose $z = \lambda$ et $y = \frac{1}{ab'-a'b}\{ad'-a'd - \lambda(ac'-a'c)\}$

et puis $x = \frac{1}{a}(d-by-cz)$ est de la forme

$(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + \lambda(\alpha,\beta,\gamma)$ c'est à dire une droite.

Si $ab'-a'b = ac'-a'c = 0 \Rightarrow (a,b,c) = \mu(a',b',c')$, $\mu \in \mathbb{C}$
(les plans sont parallèles). Si en plus $ad'-a'd = 0$ les plans sont confondus; si $ad'-a'd \neq 0$, les plans sont parallèles et disjoints.

(ii) On remarque que l'équation qui détermine S est homogène, donc si $(x_0, y_0, z_0) \in S$ il en est de même pour $\lambda(x_0, y_0, z_0)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Par conséquence : tout plan contenu dans S est homogène, c'est à dire, il est donné par une équation du type

$$ax + by + cz = 0 \quad \text{avec } (a,b,c) \neq (0,0,0).$$

Si on suppose $a \neq 0$, on peut ~~les~~ supposer $a = 1$:

$$x + by + cz = 0.$$

$$\Rightarrow -(by+cz)^3 + y^3 + z^3 = (y(1-b) + z(1-c))^3$$

$$\Rightarrow y^3 + z^3 - b^3y^3 - c^3z^3 - 3b^2y^2cz - 3byc^2z^2 = y^3(1-3b+3b^2-b^3)$$
$$+ z^3(1-3c+3c^2-c^3) + 3y^2z(1-b)^2(1-c) + 3yz^2(1-b)(1-c)^2$$

$$\Rightarrow -3y^2zb^2c - 3yz^2bc^2 = y^3(-3b+3b^2) + z^3(-3c+3c^2)$$
$$+ 3y^2z(1-b)^2(1-c) + 3yz^2(1-b)(1-c)^2$$

On compare coefficients : soit $b = 0$ soit $b^2 = 1$

Si $b = 0$, $c = 1$

Si $b = -1$ contradiction, d'où si $b = 1$ on a $c = 0$.

Deux possibilités : $x + y = 0$ ou $x + z = 0$

De la même façon, si $b \neq 0$, on a les possibilités $x + y = 0$ ou $y + z = 0$

Seules solutions possibles : $x + y = 0$, $y + z = 0$, $x + z = 0$.

(iii) Par définition d'une droite dans $\mathbb{CP}^2$ $(\{[x,y,z] \in \mathbb{CP}^2 : ax + by + cz = 0\})$ $x + y = 0$, $y + z = 0$, $x + z = 0$ correspondent à trois droites.

Soit $D_1 : x + y = 0$: $\{[x, -x, z] \in \mathbb{CP}^2, (x, z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$

$$= \{[1, -1, \lambda] \in \mathbb{CP}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\} \cup [0,0,1]\}$$

$D_2 : y + z = 0$ $= \{[\lambda, 1, -1] \in \mathbb{CP}^2 : \lambda \in \mathbb{C}\} \cup [1,0,0]$

$D_3 : x + z = 0$ $= \{[1, \lambda, -1] \in \mathbb{CP}^2 \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \cup [0,1,0]$.

Intersection $\cdot D_1 \cap D_2$: $[-1, 1, -1]$

$D_2 \cap D_3$: $[1, 1, -1]$

$D_1 \cap D_3$: $[-1, 1, 1]$

III $\mathcal{C} : x^4 + 3xy^3 + y^2 = 0$

$\mathcal{D} : y^2 - x^2 = 0$

(i) Soit $f(x) = x^4 + 3xy^3 + y^2$, $g(x) = y^2 - x^2$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 3y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 9xy^2 + 2y$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$

Toutes les dérivées s'annulent en $(0,0)$, d'où $(0,0)$ est point singulier pour chaque courbe.

Les droites tangentes en $(0,0)$ sont déterminées par les parties homogènes de plus bas degré

Pour $\mathcal{C}$ il s'agit de $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$ droite tangente double

pour $\mathcal{D}$ il s'agit de $y^2 - x^2 = 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) = 0$
$\Rightarrow x = y$ et $x = -y$ sont des droites tangentes.

(ii) Puisque les droites tangentes sont distinctes, on sait de la théorie que la multiplicité d'intersection à $(0,0)$ est le produit

$$m_0(\mathcal{C}) \times m_0(\mathcal{D}) = 2 \times 2 = 4.$$

(iii) Pour l'infini, on homogenise:

$$\tilde{\mathcal{C}} : x^4 + 3xy^3 + y^2z^2 = 0$$

$$\tilde{\mathcal{D}} : y^2 - x^2 = 0$$

On pose $z = 0 \Rightarrow x^4 + 3xy^3 = 0$ ~~$\Rightarrow$ soit $x = 0 \Rightarrow y = 0$ impossible~~

~~soit $x \neq 0$ et $x^3 + 3y^3 = 0$, mais~~

$\Rightarrow y^4 + 3xy^3 = 0$

Soit $y = 0 \Rightarrow x = 0$ impossible car $[0,0,0]$ interdit

Soit $y \neq 0 \Rightarrow y + 3x = 0$ incompatible avec $y^2 = x^2$

Aucun point à l'infini.

Puis: $y = \pm x$: si $y = +x$; $x^4 + 3x^4 + x^2 = 0$
$\Rightarrow$ soit $x = 0$ (traité en (i)) soit $x \neq 0$ et $4x^2 + 1 = 0$
$\Rightarrow x = \frac{\pm i}{2}$

deux points $(\frac{i}{2}, \frac{i}{2})$ et $(\frac{-i}{2}, \frac{-i}{2})$

Si $y = -x$: $x^4 - 3x^4 + x^2 = 0 \Rightarrow -2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

deux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}})$. Thm de Bézout $\Rightarrow$ 8 points avec mult.

$(0,0)$ mult 4, $(\frac{i}{2}, \frac{i}{2})$, $(-\frac{i}{2}, -\frac{i}{2})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ mult 1