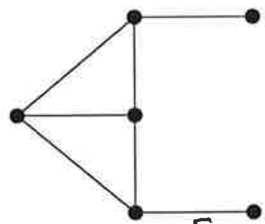
Arithmétique et applications, combinatoire et graphes

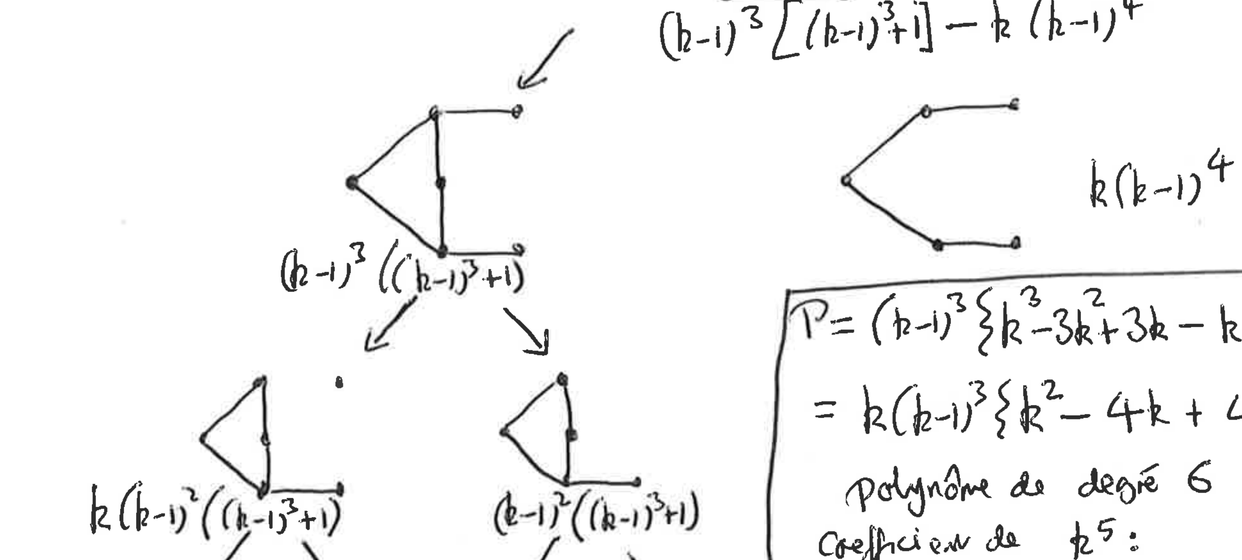
Contrôle No. 3, 29 mars 2016, graphes

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

NOM : Solutions

1. Calculer le polynôme chromatique du graphe suivant. Combien de colorations y a-t-il avec 2 couleurs, avec 3 couleurs ? Si une telle coloration existe, donner un exemple. Pour information, le polynôme chromatique du graphe cyclique C_n d'ordre n est $(k-1)^n + (-1)^n(k-1)$; celui d'un arbre quelconque d'ordre n est $k(k-1)^{n-1}$.





$P = (k-1)^3\{k^3-3k^2+3k - k(k-1)\}$

$= k(k-1)^3\{k^2-4k+4\}$

polynôme de degré 6

Coefficient de k^5 :

$k(k^3-3k^2+3k-1)(k^2-4k+4)$

$= k^6 - 3k^5 - 4k^5 + \cdots$

$= k^6 - 7k^5 + \cdots$

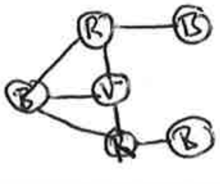
Il faut 7 arêtes qui est bien le cas.

On voit que $P = k(k-1)^3(k-2)^2$

$P(2) = 0 \Rightarrow$ aucune coloration avec 2 couleurs.

$P(3) = 3\times 8\times 1 = 24$ colorations avec 3 couleurs.

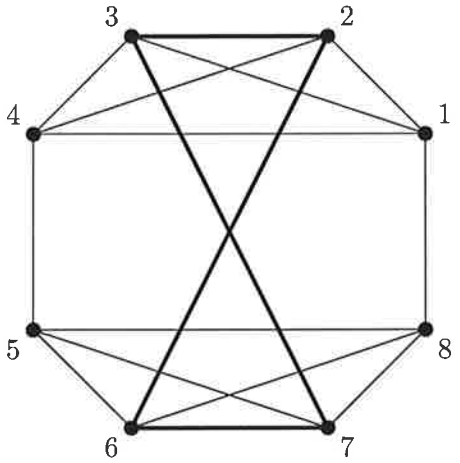
Exemple



R = rouge
B = bleue
V = verte.

SUITE...

2. L'objectif de cette question est de construire un cycle eulérien en suivant l'algorithme donné dans le cours. On commence avec le cycle $\overline{73267}$ indiqué en gras. Indiquer avec cette même notation, tous les sous-cycles eulériens que vous construisez ainsi que le chemin eulérien qui se déduit.



A partir du sommet 7 on construit le sous-cycle eulérien : 7587 $= \phi_1$

En sommet 6 : 681456 $= \phi_2$

En sommet 2 : 24312 $= \phi_3$

Ce qui épuise toutes les arêtes : on en déduit le cycle eulérien :

$$\underbrace{7587}_{\phi_1}\ \underbrace{681456}_{\phi_2}\ \underbrace{24312}_{\phi_3}\ 3\ 7$$

On voit toutes les 16 arêtes une et une seule fois dans ce cycle.