Analyse dans $\mathbb{R}^n$ – Indications aux solutions – Exercices d'entraînement (1)

1 (c) Par symétrie on peut supposer $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

Maximiser $N(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ avec contrainte $g(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$

$$\nabla N = \lambda \nabla g \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 2\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

Mais x fait partie de la contrainte: $n x_i^2 = 1 \Rightarrow x_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Maximum lorsque $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans ce cas $N(x) = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$.

Le minimum est nécessairement dans la frontière de la région $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0\}$

c'est à dire, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0$ et au moins un $x_i = 0\}$

Si $x_1 = 0$, on voit que $x_2 = x_3 = \dots = x_n$ est un maximum avec contrainte $x_1 = 0$, et $x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$: $x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$
et $N = \sqrt{n-1}$ etc

Par récurrence on voit que $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$ est minimum lorsque $N(x) = 1$.

(d) Lorsque $\|x\| = 1$, max $N(x) = \sqrt{n}$, mini $N(x) = 1$

c'est à dire $\|x\| \leq N(x) \leq \sqrt{n}\, \|x\|$ et les normes sont équivalentes

$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$

2 (a) Si $A = \mathbb{R}^n$: $\partial A = \emptyset$, $A = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ alors $\partial A = A$.

(b) $\partial \overline{A} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A})} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A})}$, $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$

Alors $A \subset \overline{A} \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \supset \mathbb{R}^n \setminus \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \supset \overline{\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}} \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} \supset \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{A})}$
$\Rightarrow \partial \overline{A} \subset \partial A$

~~$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A})} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A})}$ et $\partial A = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)}$~~
~~Mais $\mathring{A} \subset A \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \mathring{A} \supset \mathbb{R}^n \setminus A \Rightarrow \overline{\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A}} \supset \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \Rightarrow$~~

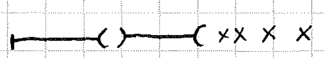
$\mathring{A} \subset A \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$

car fermé

$\partial \mathring{A} = \overline{\mathring{A}} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A})} \subset \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus \mathring{A})} = \overline{A} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus A)} = \partial A$

Soit $A = [-2, -1[\cup]-1, 0[\cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 1\}$

$\overline{A} = [-2, 0] \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$



$\mathring{A} =]-2, -1[\cup]-1, 0[$

$\partial A = \{-2, 1, 0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\partial \overline{A} = \{-2, 0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$\partial \mathring{A} = \{-2, 1, 0\}$

(c)

$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$, $\partial A = A \cup \{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$

(d) Tout point de l'ensemble $\{(0, y) \mid -1 \leq y \leq 1\}$ est une valeur d'adhérence

3/ Question de cours

4/ $A \subset \mathbb{R}^n$ compact, $f : A \to A$, $\|f(y) - f(x)\| \geq \|y - x\| \quad \forall x, y \in A$ $(*)$

(Bolzano-Weierstrass : toute suite de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A ; la limite de toute suite convergente de A appartient à A)

$a, b \in A$ quelconque, $a_1 = f(a)$, $a_{k+1} = f(a_k)$
$b_1 = f(b)$, $b_{k+1} = f(b_k)$

(b) Soit a^* un point d'accumulation de la suite (a_k) et soit $\varepsilon > 0$. ~~Alors $\exists\, l$ t.q. $\|a^* - a_l\| < \varepsilon$~~
Alors $I = \{k \in \mathbb{N} : \|a_k - a^*\| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ est infini
Soient $k_1, k_2 \in I$ avec $k_1 < k_2$. Alors

$$\|a_{k_1} - a_{k_2}\| = \|a_{k_1} - a^* + a^* - a_{k_2}\| \leq \|a_{k_1} - a^*\| + \|a_{k_2} - a^*\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Mais $\|a_{k_1} - a_{k_2}\| = \|f(a_{k_1-1}) - f(a_{k_2-1})\| \geq \|a_{k_1-1} - a_{k_2-1}\|$ par $(*)$

De même : $\|a_{k_1-1} - a_{k_2-1}\| \geq \|a_{k_1-2} - a_{k_2-2}\|$ etc.

d'où $\varepsilon > \|a_{k_1} - a_{k_2}\| \geq \dots \geq \|a_{k_1-k_1} - a_{k_2-k_1}\|$
$= \|a - a_{k_2-k_1}\|$

Soit $k = k_2 - k_1$, alors $\|a - a_k\| < \varepsilon$

Puisque $a_k = f(a_{k-1})$ et a et ε sont arbitraires, on en déduit que $\forall \varepsilon > 0, \forall a \in A$, $\exists\, \tilde{a} \in f(A)$ avec $\|a - \tilde{a}\| < \varepsilon$
$(\tilde{a} = a_{k-1})$
d'où la densité

(c) Le produit $A \times A$ est compact, ~~et~~ d'où, par Bolzano-Weierstrass, la suite (a_i, b_i) présente un point d'accumulation $(a^*, b^*) \in A \times A$.
$A \times A$ est muni de la norme produit $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$
Donnée $\varepsilon > 0$, $\exists$ deux indices k_1, k_2, $k_1 < k_2$ avec

$$\|(a^*, b^*) - (a_{k_1}, b_{k_1})\| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \|(a^*, b^*) - (a_{k_2}, b_{k_2})\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme dans la partie (b) $\Longrightarrow$ $\|(a, b) - (a_{k_2-k_1}, b_{k_2-k_1})\| < \varepsilon$. Soit $k = k_2 - k_1$

alors $\|(a, b) - (a_k, b_k)\| < \varepsilon$
$\Rightarrow \|a - a_k\| + \|b - b_k\| < \varepsilon \Rightarrow \|a - a_k\| < \varepsilon$ et $\|b - b_k\| < \varepsilon$.

Supposons $\|f(a) - f(b)\| \gneq \|a - b\|$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\|f(a) - f(b)\| = \|a - b\| + \varepsilon$
Soit k t.q. $\|a - a_k\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|b - b_k\| < \varepsilon/2$

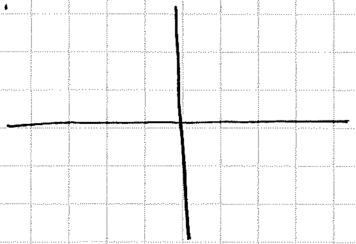
Alors $\|a_1 - b_1\| = \|a - b\| + \varepsilon$
$\Rightarrow \|a_2 - b_2\| \geq \|a_1 - b_1\| = \|a - b\| + \varepsilon$
$\dots \Rightarrow \|a_k - b_k\| \geq \|a - b\| + \varepsilon \Rightarrow \|a_k - b_k\| - \|a - b\| \geq \varepsilon$

D'où $\varepsilon \leq \|a_k - b_k\| - \|a - b\| \overset{(*)}{\leq} \|a_k - a + b - b_k\| \leq \|a_k - a\| + \|b - b_k\| < \varepsilon$
contradiction

(Etape $(*)$ $\|c\| - \|d\| \leq \|c - d\| \quad \forall d, c$)

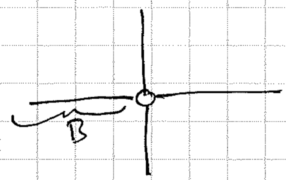
5/ Ensemble connexe :

(b) A_1



Connexe : En effet tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ intersect A en une réunion d'intervalles ouverts des axes, dont le complément est fermé, pas ouvert.

A_2



Pas connexe : $A_2 = B \cup A$ avec $B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$

Alors B est ouvert relatif à A, car $B = A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$

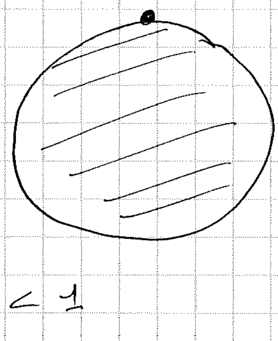
et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x < 0\}$ est ouvert.

Le complément $A = A_2 \setminus B$ est aussi ouvert par le même raisonnement.

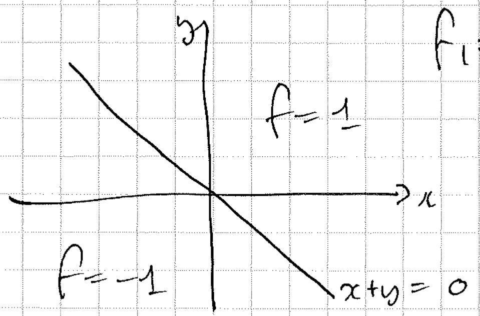
A_3

Connexe

car tout ouvert contenant le point $(0,1)$ intersect la boule $\|x\| < 1$



(C)



$f_1 = f|_{A_1}$ n'est pas continue

Soit $U = B(\ldots)$

$]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\subset \mathbb{R}$ ouvert

$f_1^{-1}(U) = 0$ qui n'est pas ouvert dans A_1

$f_2 = f|_{A_2}$ est bien continue.

$f_2^{-1}(]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[) = \{(x,0) \mid x > 0\} \cup \{(0,y) \mid y > 0\}$ qui est ouvert relatif à A_2

$\varepsilon < 1$

$f_2^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[) = \emptyset$ ouvert

$f_2^{-1}(]-\varepsilon-1, -1+\varepsilon[) = \{(x,0) \mid x < 0\} \cup \{(0,y) \mid y < 0\}$ qui est ouvert relatif à A_2

6/ (b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ linéaire : $f(x+h) = f(x) + f(h)$

d'où, d'après la définition $Df(x)(h) = f(h)$, c'est-à-dire $Df(x) = f$

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $f(x) = x - (x\cdot u)u$ est linéaire en x,

d'où $Df(x)(h) = f(h) = h - (h\cdot u)u$

7/ (a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$
$f(0,0) = 0$

Si $(x_1,y_1) = (x_2,y_2) = (0,0)$, la limite existe et vaut 0.

en plus si $(x_2,y_2) = (0,0)$, la limite vaut 0

On suppose d'abord ~~alors~~ que ~~les deux points sont pas (0,0)~~ $(x_1,y_1) \neq 0$

$$f(x_1+tx_2, y_1+ty_2) - f(x_1,y_1) = \frac{(x_1+tx_2)(y_1+ty_2)^2}{(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2} - \frac{x_1y_1^2}{x_1^2+y_1^2}$$

$$= \frac{x_1y_1^2 + t(x_2y_1^2 + 2x_1y_1y_2) + t^2(2x_2y_1y_2 + x_1y_2^2) + t^3x_2y_2^2}{(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2} - \frac{x_1y_1^2}{x_1^2+y_1^2}$$

$$= \frac{(x_1^2+y_1^2)\{x_1y_1^2 + t(x_2y_1^2+2x_1y_1y_2) + t^2(2x_2y_1y_2+x_1y_2^2) + t^3x_1y_2^2\} - x_1y_1^2\{(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2\}}{(x_1^2+y_1^2)[(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2]}$$

$$= \frac{t\{(x_2y_1^2+2x_1y_1y_2)(x_1^2+y_1^2) - 2x_1^2x_2y_1^2 - 2x_1y_1^3y_2\} + O(t^2)}{(x_1^2+y_1^2)[(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2]}$$

$$= \frac{t\{x_2y_1^2(x_1^2+y_1^2) + 2x_1^3y_1y_2 - 2x_1^2x_2y_1^2\} + O(t^2)}{(x_1^2+y_1^2)[(x_1+tx_2)^2+(y_1+ty_2)^2]}$$

On divise par t et on laisse $t \to 0$, pour obtenir

$$\lim_{t\to 0} = g((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \frac{x_2y_1^2(x_1^2+y_1^2) + 2x_1^3y_1y_2 - 2x_1^2x_2y_1^2}{(x_1^2+y_1^2)[x_1^2+y_1^2]}$$

Si $(x_1,y_1) = \vec{0}$

$$\frac{f(0+tx_2, 0+ty_2) - f(0,0)}{t} = \frac{t^3 x_2y_2^2}{t^2(x_2^2+y_2^2)} \Big/ t$$

$\longrightarrow \frac{x_2y_2^2}{x_2^2+y_2^2}$ lorsque $t \to 0$ pas linéaire

en effet $(1,1) \mapsto \frac{1}{2}$

Mais $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ et $(1,0) \mapsto 0$
$(0,1) \mapsto 0$

Si f dérivable, on aurait que la partie droite soit $Df\binom{0}{0}\binom{x_2}{y_2}$ linéaire en $\binom{x_2}{y_2}$ — contradiction