L2 Mathématiques — Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Examen session 1, (09/01/2019)

Aucun document n'est autorisé.

Question de cours:

(1) Enoncer le théorème des fonctions implicites.

(2) Soit $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^1, a un point de Ω tel que $(D\phi)(a)$ soit inversible.

(a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que si

$$|p_{ij} - \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(a)| < \epsilon$$

alors $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$ est inversible.

(b) Utiliser le théorème des accroissements finis pour ϕ_i pour montrer que

$$\phi(x) - \phi(y) = P(x - y).$$

(c) En déduire que ϕ est locallement injective.

Question 1:

Soient A, B deux parties compactes non vides de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a-b\| = \min\{\|x-y\| \text{ tq } x \in A,\ y \in B\}$.

Montrer que ceci est encore vrai si on suppose A compact et B fermé.

Question 2:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.

(1) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
(2) Déterminer les dérivées partielles de f en un point quelconque distinct de l'origine.
(3) La fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x, à y en $(0,0)$?

Question 3:

(1) Etudier la continuité, l'existence des dérivées partielles et la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction:
$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$$
et $f(0,0) = 0$
(2) Montrer que les dérivées partielles de la fonction suivante existent en $(0,0)$ mais que les autres dérivées directionnelles n'existent pas:
$$f(x,y) = (xy)^{1/3}$$

Question 4:

Déterminer et classifier les points critiques de $f(x,y) = y^2(\sin x - \frac{x}{2})$ (on ne cherchera pas à résoudre $\sin x - \frac{x}{2} = 0$).

Question 5:

On pose $f(x,y) = x^2+y^2+xy+1$ et $g(x,y) = x^2+y^2+4xy-2$.

(1) Déterminer les points critiques de f, de g.

(2) En reconnaissant le début du développement d'un carré, étudier les extrema locaux de f.
(3) En étudiant les valeurs de g sur deux droites vectorielles bien choisies, étudier les extrema locaux de g.

Question 6:

Déterminer les points critiques de $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 4$.

Question 7:

(1) Déterminer les points stationnaires de la fonction f de deux variables définie par $f(x,y) = x\,(x+1)^2 - y^2$ et préciser la nature de chacun d'eux.
(2) Tracer la courbe constituée des points tels que $f(x,y) = 0$ et $x \geq 0$. (*Indication*: Étudier la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\,(x+1)$ pour $x \geq 0$).
(3) Montrer que le point $(-1,0)$ est un point isolé de la partie

$$C = \{(x,y); f(x,y) = 0\}$$

du plan, c'est-à-dire, le point $(-1,0)$ appartient à cette partie et il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $D_\varepsilon \cap C = \{(-1,0)\}$ où D_ε est le disque ouvert centré en $(-1,0)$ et de rayon ε.
(4) Montrer que, quel que soit le point (x_0, y_0) de C distinct de $(-1,0)$, au moins une des deux alternatives (i) ou (ii) ci-dessous est vérifiée:
   (i) Il existe une fonction h de classe C^1 de la variable x définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(x_0) = y_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0, y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $y = h(x)$.
   (ii) Il existe une fonction k de classe C^1 de la variable y définie dans un intervalle ouvert approprié telle que $h(y_0) = x_0$ et telle que, pour qu'au voisinage de (x_0, y_0) les coordonnées x et y du point (x,y) satisfassent à l'équation $f(x,y) = 0$ il faut et il suffit que $x = k(y)$.