Devoir préparatoire 2 : solutions (indication)

1. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+xyz\\y+xy\\z+2x+3z^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$

(a) $J_f = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+yz & xz & xy\\ y & 1+x & 0\\ 2 & 0 & 1+6z\end{pmatrix}$

$J_f(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ avec déterminant $1 \neq 0$, d'où rang $J_f(0) = 3$

(b) Puisque rang $J_f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 3$, par le théorème de l'application inverse il existe un voisinage U de $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et un voisinage V de $f\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ tel que $f(U) = V$ est f admet une inverse g de classe C^1, $g : V \to U$. $(\forall x \in U,\ g(f(x)) = x,\ \forall y \in V,\ f(g(y)) = y)$.

Pour $\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} \in V$ le système est alors résoluble :

$$\begin{pmatrix}x(u,v,w)\\y(u,v,w)\\z(u,v,w)\end{pmatrix} = g\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}.$$

2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2y + xz^2 - \frac{5}{2}x^2 + yz$.

Points critiques : $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$, c'est à dire

$$\begin{cases}2xy + z^2 - 5x = 0 & (1)\\ x^2 + z = 0 & (2)\\ 2xz + y = 0 & (3)\end{cases}$$

$(3) \Rightarrow y = -2xz \overset{(1)}{\Longrightarrow} -4x^2z + z^2 - 5x = 0$

$(2) \Rightarrow \cancel{z = -x^2}\ x^2 = -z \Rightarrow 4z^2 + z^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow 5z^2 - 5x = 0 \Rightarrow z^2 - x = 0$

Soit $x = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 0$, d'où $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ pt critique

Sinon : $(2) \Rightarrow z^4 + z = 0 \Rightarrow z(z^3+1) = 0 \Rightarrow z(z+1)(z^2-z+1) = 0$

soit $z = 0$ (solution déjà obtenue) soit $z = -1$

soit $z^2 - z + 1 = 0$ — pas de solution réelle :

$z = -1 \Rightarrow x = z^2 = 1$, $y = -2xz = 2$: $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ pt critique

Nature : $H_f(x) = \begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y-5 & 2x & 2z\\ 2x & 0 & 1\\ 2z & 1 & 2x\end{pmatrix}$

en $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$: $H_f = \begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ valeurs propres $\begin{vmatrix}-5-\lambda & 0 & 0\\0 & -\lambda & 1\\0 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(5+\lambda)(\lambda^2-1)$

$\lambda = -5, 1, -1$ pt de selle

en $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$: $H_f = \begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\2 & 0 & 1\\-2 & 1 & +2\end{pmatrix}$ valeurs propres $\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2 & -2\\2 & -\lambda & 1\\-2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1+\lambda)(\lambda^2-2\lambda-1) - 2(4-2\lambda+2) - 2(2-2\lambda) = 0$

$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda - 15$

On cherche des informations sur les racines de

$$u(\lambda) := -\lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda - 15 = 0$$

~~$\exists$~~ $u(0) = -15$

$\lim_{\lambda \to -\infty} u(\lambda) = +\infty$, d'où $\exists$ racine dans l'intervalle ~~$\exists\,]0, -\infty$~~ $]-\infty, 0[$

(racine négative).

D'autre part

$$u(2) = -8 + 4 + 22 - 15 = 3 > 0$$

et il existe une racine dans l'intervalle $]0,2[$
(racine positive)

Il s'ensuit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un point de selle.