L2 Mathématiques PMRC, Analyse dans $\mathbf{R}^n$

Contrôle No. 1, Oct 2019

Aucun document n'est autorisé, usage de calculatrices interdit

Nom : SOLUTIONS

1. (a) Montrer que la fonction $N : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ donnée par

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

est une norme sur $\mathbf{R}^n$, où $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont les coordonnées canoniques.

(b) Montrer que N est équivalente à la norme euclidienne (dans le devoir on a montré que la norme sup est équivalente à la norme euclidienne - eventuellement on peut se servir de ce calcul).

On considère $\mathbf{R}^2$ muni de la norme N définie ci-dessus. Soit $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction $t \to N(ta + b)$.

(c) Montrer que $f(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $\pm\infty$.

(d) Montrer que f atteint sa borne inférieure m en au moins un point t_0 de $\mathbf{R}$ et calculer cette borne. Est-ce-que le point t_0 est unique ? Justifier.

(a) • $N(x) = 0 \iff |x_1| + \cdots + |x_n| = 0 \iff |x_i| = 0 \ \forall i \iff x_i = 0 \ \forall i$

• $N(\lambda x) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda| |x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda| N(x)$

• $N(x+y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + |y_i| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = N(x) + N(y)$

(b) On remarque que $\sup_i |x_i| \leq N(x) \leq n \sup_i |x_i|$

$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{n \sup |x_i|^2} = \sqrt{n} \sup |x_i| \leq \sqrt{n} N(x)$

$N(x) \leq n \sup_i |x_i| \leq n \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = n \|x\|$

d'où $\frac{1}{\sqrt{n}} \|x\| \leq N(x) \leq n \|x\|$ et les normes sont équivalentes

(c) On a $|N(b) - N(a)| \leq N(a+b)$

d'où $N(ta) - N(b) \leq N(ta+b)$

Mais $N(ta) = |t| N(a) \to \infty$ lorsque $t \to \pm\infty$

car $N(a) \neq 0$

$N(a+b) \leq N(a) + N(b)$
$\overset{b = c-a}{\Longrightarrow} N(c) \leq N(a) + N(c-a)$
$\Longrightarrow N(c) - N(a) \leq N(a-c)$
$\overset{b = -c}{\Longrightarrow} N(b) - N(a) \leq N(a+b)$
de même
$N(a) - N(b) \leq N(a+b)$

SUITE...

(d) $f(0) = N(b) = 2$ donc $m \leq 2$.

Soit D la droite $t \mapsto ta+b$ dans $\mathbb{R}^2$, alors $A = D \cap \overline{B(0,2)}$ est fermé et borné, donc compact. La fonction f atteint son min sur A en au moins un point t_0

$N(ta+b) = N\begin{pmatrix} t+1 \\ t-1 \end{pmatrix} = |t+1| + |t-1|$ Pour $t \geq 1$, $f(t) = t+1+t-1 = 2t \geq 2$

pour $t \leq -1$, $f(t) = -(t+1) + 1 - t = -2t \geq 2$

pour $-1 \leq t \leq 1$, $f(t) = t+1+1-t = 2$.

t_0 pas unique, $m = 2$ atteint par tout t avec $-1 \leq t \leq 1$

2. Pour l'ensemble A donné, dire s'il est ouvert, fermé, ni l'un ni l'autre, compact; indiquer les points isolés et les points d'adhérence.

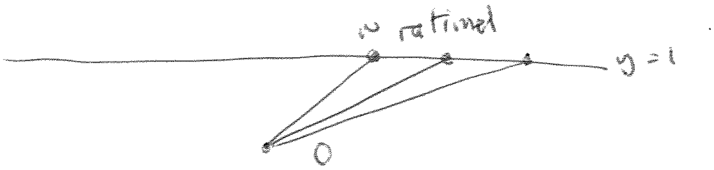
(a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}^*\} \cup \{0\} \subset \mathbf{R}$.

(b) $A = \cup_{r \in \mathbf{Q}} [(0,0),(r,1)] \subset \mathbf{R}^2$ où $[x,y] = \{(1-t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ désigne le segment droit joignant deux points $x, y \in \mathbf{R}^n$ et $\mathbf{Q}$ est l'ensemble des nombres rationels.

(a) A fermé, compact, points isolés : $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$

points d'adhérence : tous les points de A

(b)

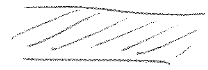


Ni ouvert, ni fermé

pas compact

pas de point isolé

points d'adhérence : tous les points du ruban $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq y \leq 1\}$



3. On considère $\mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne $||\cdot||$. Montrer que l'application $x \to ||x||^2$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$ est dérivable en chaque point $x \in \mathbf{R}^n$ et calculer sa dérivée.

On remarque que $\|x\|^2 = x \cdot x$ avec $x \cdot y$ le produit scalaire de deux vecteurs.

$$\|x+h\|^2 = (x+h)\cdot(x+h) = \|x\|^2 + 2x\cdot h + \|h\|^2$$

Soit $f(x) = \|x\|^2$, alors

$$f(x+h) = f(x) + 2x\cdot h + \|h\|^2$$

Puisque $2x\cdot h$ est linéaire en h et $\|h\|^2$ est $o(h)$ on voit que $Df(x)(h) = 2x\cdot h$

FIN