M1 Variable complexe – Feuille de TD 2 – Paul Baird

Fonction exponentielle, logarithme

1. (fonctions complexes) Trouver les zéros des fonctions suivantes :

$$1+e^z, \quad \sinh z, \quad \cosh z, \quad \frac{1}{e}-e^z, \quad 1+\mathrm{i}-e^z\,.$$

2. (ln et exp) Pour tout $z \in \mathbf{C}$, montrer que $n\ln_0(1+z/n)$ est définie pour tout n assez grand et tend vers z lorsque $n \to \infty$. En déduire que $(1+z/n)^n \to e^z$ lorsque $n \to \infty$.

3. (fonction tangente) Montrer que la fonction $\tan z = \sin z/\cos z$ détermine une fonction bijective

$$\left\{z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \to \mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}\,.$$

4. (la fonction argument) Soit f une fonction continue à valeurs réelles définie sur $\{z : |z| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point z tel que $f(-z) = f(z)$. En déduire que l'argument n'est pas continue dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

5. (la fonction logarithme) Trouver le domaine et image de la fonction

$$z \mapsto \ln_0\left(-\mathrm{i}\frac{z-1}{z+1}\right)$$

Calculer sa partie réelle et imaginaire et montrer qu'elle est holomorphe.

6. (fonction exponentielle). Est-ce-que $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ existe ?

7. (a) Montrer que la fonction

$$z \mapsto \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

détermine une bijection holomorphe du demi-plan $H := \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ dans le disque unité $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$.

(b) Trouver une bijection holomorphe du plan coupé $U = \mathbf{C}\setminus\{z = x+\mathrm{i}y : y = 0, x \leq 0\}$ dans H et en déduire une bijection holomorphe de U dans D.

(c) Montrer que la fonction $\ln_0\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2$ est bien définie et holomorphe dans le disque unité D (considérer l'inverse de la fonction trouvée dans (b)).

8. (a) Pour $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$, exprîmer $\dfrac{1+w}{1-w}$ en forme polaire $re^{\mathrm{i}\theta}$.

(b) Soit $f(z) = \operatorname{th} z = (e^z - e^{-z})/(e^z + e^{-z})$. Montrer que f applique $\mathbf{C}$ surjectivement sur $\mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$.

(c) En déduire un sous-ensemble $D \subset \mathbf{C}$ sur lequel $f : D \to \mathbf{C} \setminus \{\pm 1\}$ est bijective (on peut applique la partie (a) de cette question).

9. (a) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f(z)$ définie dans le plan coupé $U := \mathbf{C} \setminus \{x + \mathrm{i}y \in \mathbf{C} : y = 0, x \leq 0\}$ vérifiant $f(z)^4 = z$ pour tout $z \in U$ et $f(1) = 1$. Quelle est l'image de cette fonction ?

(b) Trouver une bijection holomorphe de U dans le quadrant : $V := \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, \mathrm{Im}\, z > 0\}$.

(c) Montrer que la fonction $g(z) := \ln_0(-z^4)$ est bien définie et holomorphe dans V. Quelle est l'image par g de la courbe $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}t}$, $0 < t < \pi/2$.