

## Variable complexe – Paul Baird

### §3. Intégrale complexe

**Chemins** : Un chemin est une application continue  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$ . Deux chemins  $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{C}$  sont équivalents s'il existe une fonction continue strictement croissante  $\tau : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$  telle que  $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$  pour tout  $t \in [a_1, b_1]$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence. Une courbe est une classe d'équivalence de chemins.

**Réunion de deux chemins** : Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\delta : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$  deux chemins tels que  $\gamma(b) = \delta(c)$ . Soit  $\delta_1(t) = \delta(t + c - b)$ ,  $b \leq t \leq b + d - c$ . Alors  $\delta_1$  est équivalent à  $\delta$ . En plus, la fonction qui est confondue avec  $\gamma$  sur  $[a, b]$  et  $\delta_1$  sur  $[b, b + d - c]$  est continue dans  $[a, b + d - c]$  et détermine un chemin noté  $\gamma \cup \delta$ .

**Chemin continuellement différentiable** : Un chemin  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  est dit continuellement différentiable, ou de classe  $C^1$ , si  $\gamma(t)$  admet une dérivée  $\gamma'(t)$  qui est continue en chaque point  $t \in [a, b]$ . Si en plus  $\gamma'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$  on dit que  $\gamma$  est régulière.

Un chemin  $\gamma$  est continuellement différentiable par morceaux si  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n$  avec chaque  $\gamma_j$  continuellement différentiable.

**Longueur d'un chemin** : Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin et soit  $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  une subdivision de  $[a, b]$ . Soit

$$L(\gamma, S) := \sum_{j=1}^n |\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})|.$$

Par l'inégalité triangulaire,  $L(\gamma, S') \geq L(\gamma, S)$  lorsque  $S' \supseteq S$ . On dit que  $\gamma$  est rectifiable si  $\{L(\gamma, S) \mid S \text{ une subdivision de } [a, b]\}$  est majoré. La borne supérieure est la longueur de  $\gamma$  notée  $|\gamma|$ .

Exercices : (i) soit  $\gamma(t) = tz + (1-t)w$ , ( $t \in [0, 1], z, w \in \mathbf{C}$ ). Montrer que  $|\gamma| = |w - z|$ .

(ii) Montrer que  $|\gamma \cup \delta| = |\gamma| + |\delta|$ .

Théorème : Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbf{C}$  continuellement différentiable régulière, alors

$$|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Preuve : Soit  $S$  une subdivision de  $[a, b]$ . Alors

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}),$$

<sup>2</sup>  
donc

$$|\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})| = \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\gamma'(t)| dt.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\gamma'$  est uniformément continue dans  $[a, b]$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $s, t \in [a, b], |s - t| < \delta \Rightarrow |\gamma'(s) - \gamma'(t)| < \varepsilon$ . Soit  $S : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$  une subdivision de  $[a, b]$  tel que  $t_j - t_{j-1} \leq \delta$  pour chaque  $j$ . Posons  $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ . Pour chaque  $j$ , il existe  $p_j, q_j \in (t_{j-1}, t_j)$  tels que

$$\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})(u'(p_j) + iv'(q_j))$$

(formule des accroissements finis). Soit  $\psi(t) = u'(p_j) + iv'(q_j)$  pour  $t_{j-1} \leq t < t_j$ . Alors  $\psi$  est constante sur chaque  $[t_{j-1}, t_j]$  et

$$|\psi(t) - \gamma'(t)| = (u'(p_j) + iv'(q_j) - u'(t) - iv'(t)) \leq 2\varepsilon$$

pour tout  $t$ . Donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (|\gamma'(t)| - |\psi(t)|) dt &\leq 2\varepsilon(b - a) \\ \Rightarrow |\gamma| \geq L(\psi, S) &= \int_a^b |\psi(t)| dt \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt - 2\varepsilon(b - a), \end{aligned}$$

et  $|\gamma| \geq \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ . □

**Définition de l'intégrale :** Soit  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin de classe  $C^1$  et soit  $f(z)$  une fonction complexe définie sur l'image de  $\gamma$ . On appelle *intégrale de  $f$  le long du chemin  $\gamma$*  la quantité

$$\int_{\gamma} f dz := \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \gamma)(t) \gamma'(t) dt.$$

Remarque : Cette définition est invariante par changement de paramètre. En effet, si  $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbf{C}$  est tel que  $\gamma = \gamma_1 \circ \tau$  où  $\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha_1, \beta_1]$  est strictement croissante de classe  $C^1$ , alors  $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz$  par la formule de changement de variable dans un intégrale.

Exemple : Soit  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$  le cercle de rayon  $r : \gamma(t) = re^{it}$  et soit  $f(z) = 1/z$ .

Alors

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

Exercices : 1. Calculer  $\int_{\gamma} z^m dz$  pour tout  $m \in \mathbf{Z}$  où  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C}$  est le cercle  $\gamma(t) = e^{it}$ .

2. Soit  $a, b \in \mathbf{C}$  et posons  $\gamma(t) = tb + (1-t)a$  le segment droit joignant  $a$  à  $b$ . Calculer  $\int_{\gamma} z^n dz$ .

**Propriétés de l'intégrale complexe :** 1. Linéarité :

$$\int_{\gamma} (af + bg)dz = a \int_{\gamma} f dz + b \int_{\gamma} g dz \quad (a, b \in \mathbf{C})$$

2. Additivité : Soient  $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \mathbf{C}$  et  $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathbf{C}$  deux chemins  $C^1$  tels que  $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$  et soit  $\gamma_1 \cup \gamma_2$  leur réunion. Alors

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$$

3. Orientabilité : On désigne par  $\gamma^-$  le chemin obtenu à partir de  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  par le changement de variable  $t \mapsto \alpha + \beta - t$ , c'est à dire  $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$ . On dit que  $\gamma^-$  se déduit de  $\gamma$  par un changement d'orientation. Soit  $f$  intégrable le long de  $\gamma$  ; alors

$$\int_{\gamma^-} f dz = - \int_{\gamma} f dz.$$

**Longueur d'un chemin :** Soit  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin  $C^1$  et écrivons  $|d\gamma| = |\gamma'(t)|dt$ . Alors la longueur  $L(\gamma)$  de  $\gamma$  est donnée par

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |d\gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt.$$

**Estimation de l'intégrale :**

Théorème 3.1 : Pour toute fonction  $f$  intégrable le long d'un chemin  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  de classe  $C^1$  on a

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |d\gamma|$$

En particulier, si  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \gamma([\alpha, \beta])$  alors

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq ML(\gamma).$$

Preuve : Soit  $J = \int_{\gamma} f dz$  et écrire  $J = |J|e^{i\theta}$  pour un nombre  $\theta$ . Alors

$$|J| = \int_{\gamma} e^{-i\theta} f dz = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Puisque la partie droite est un nombre réel, on a

$$|J| = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re} \{ e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \} dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |f| |d\gamma|.$$

□

**L'indice d'un chemin :** On dit qu'un chemin  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  est fermé si  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ .

Théorème 3.2 : Soit  $\gamma$  un chemin fermé  $C^1$  par morceaux et soit  $\Omega$  le complément de son image dans  $\mathbf{C}$ . Soit

$$Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} \quad (z \in \Omega)$$

Alors  $Ind_{\gamma}$  est une fonction à valeurs entières sur  $\Omega$  qui est constante sur chaque composante connexe de  $\Omega$  est qui est nulle sur la composante non-bornée de  $\Omega$ .

Preuve : Soit  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{C}$  un chemin fermé et soit  $z \in \Omega$  :

$$(1) \quad Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt$$

Alors  $\zeta/2\pi i$  est un entier si et seulement si  $e^{\zeta} = 1$ . Il faut démontrer que  $\varphi(b) = 1$  où

$$\varphi(s) = \exp \left\{ \int_{\alpha}^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z} dt \right\} \quad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

Mais

$$\frac{\varphi'(s)}{\varphi(s)} = \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}$$

en tout point sauf en un nombre fini  $S$  où  $\gamma$  n'est pas  $C^1$ . Il s'ensuit que  $\varphi/(\gamma-z)$  est une fonction continue sur  $[\alpha, \beta]$  dont la dérivée s'annule dans  $[\alpha, \beta] \setminus S$ , ce qui entraîne que  $\varphi/(\gamma-z)$  est constante sur  $[\alpha, \beta]$ . Puisque  $\varphi(a) = 1$  alors

$$\varphi(s) = \frac{\gamma(s)-z}{\gamma(a)-z} \quad (\alpha \leq s \leq \beta)$$

Mais  $\gamma$  fermé  $\Rightarrow \gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$  et donc  $\varphi(\beta) = 1$  et  $Ind_{\gamma}(z)$  est un entier. Puisque  $Ind_{\gamma}$  est continue sur chaque composante de  $\Omega$ , elle est constante sur chaque composante. Enfin (1) implique que  $|Ind_{\gamma}(z)| < 1$  pour  $z$  suffisamment grand et par suite  $Ind_{\gamma}$  est zéro sur la composante non-bornée de  $\Omega$ .  $\square$

**Théorème de Taylor-Lagrange pour une fonction holomorphe** : On se rappelle de la règle de Leibnitz :

Théorème 3.3 : Soit  $\varphi : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction continue et définissons  $g : [c, d] \rightarrow \mathbf{C}$  par

$$g(t) = \int_a^b \varphi(s, t) ds.$$

Alors  $g$  est continue. En plus, si  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  existe et est continue sur  $[a, b] \times [c, d]$  alors  $g$  est continuellement différentiable et

$$g'(t) = \int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, t) ds$$

Lemme 3.4 :

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds = 2\pi$$

pour tout  $z$  avec  $|z| < 1$ .

Preuve : C'est une conséquence du Théorème 3.2 et l'exemple :  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$  où  $\gamma$  est le cercle unité.  $\square$

Théorème 3.5 : Soit  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  holomorphe sur un ouvert  $U$  et supposons que l'adhérence  $\overline{D(a, r)} \subset U$  ( $D(a, r) = \{z \in \mathbf{C} : |z-a| < r\}$ ). Soit  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour tout  $z$  tel que  $|z-a| < r$ .

En particulière on en déduit le théorème de la moyenne :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

(la valeur de  $f$  en  $a$  égale à sa moyenne arithmétique le long des cercles assez petits centrés en  $a$ ).

Preuve : En définissant  $U_1 = \{\frac{1}{r}(z-a) : z \in U\}$  et en remplaçant  $f(z)$  par  $g(z) = f(a + rz)$ , on peut supposer que  $a = 0$  et  $r = 1$ , c'est à dire que  $\overline{B(0, 1)} \subset U$ .

Soit  $z$  fixé avec  $|z| < 1$ . Il faut démontrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} ds$$

c'est à dire que

$$0 = \int_0^{2\pi} \left( \frac{f(e^{is})e^{is}}{e^{is}-z} - f(z) \right) ds.$$

On applique la règle de Leibnitz (Théorème 3.3) en posant

$$\varphi(s, t) = \frac{f((z + t(e^{is} - z))e^{is}}{e^{is} - z} - f(z)$$

pour  $0 \leq t \leq 1$  et  $0 \leq s \leq 2\pi$ . Puisque  $|z + t(e^{is} - z)| = |z(1-t) + te^{is}| \leq 1$ ,  $\varphi$  est bien définie et continument différentiable, d'où la dérivée de  $g(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, t) ds$  est continue.

Le résultat s'ensuivra si on peut démontrer que  $g(1) = 0$ . On montre que  $g(0) = 0$  est que  $g$  est constante. En effet

$$g(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(s, 0) ds = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{e^{is}}{e^{is}-z} ds - 2\pi f(z) = 0$$

par le Lemme 3.4.

En plus, la règle de Leibnitz entraine que

$$g'(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} ds$$

<sup>6</sup> où  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{is} f'(z+t(e^{is}-z))$ . D'autre part, pour  $0 < t \leq 1$  on a  $\Phi(s) := -if(z+t(e^{is}-z))/t$  vérifie  $\Phi'(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Donc

$$g'(t) = \Phi(2\pi) - \Phi(0) = 0.$$

Puisque  $g'(t)$  est continue on a  $g' \equiv 0$  et  $g$  est constante.  $\square$

Comment appliquer ce résultat afin de trouver une série entière ? On applique la série géométrique : pour  $|z-a| < r$  et  $|w-a| = r$  on a

$$\frac{1}{w-z} = \left( \frac{1}{w-a} \right) \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \frac{1}{w-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{w-a} \right)^n.$$

Ensuite, on multiplie les deux parties par  $f(w)/2\pi i$  et on prend l'intégrale le long du cercle  $\gamma : |z-a| = r$ . Par le théorème 3.5, la partie gauche est  $f(z)$  et si on est assuré de la convergence uniforme, la partie droite serait

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

La convergence uniforme est une conséquence du théorème suivant.

**Théorème 3.6** : Soit  $f$  holomorphe dans  $D(a, R)$ , alors  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$  pour tout  $z$  tel que  $|z-a| < R$ , où

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

**Preuve** : Soit  $0 < r < R$ , d'où  $\overline{D(a, r)} \subset D(a, R)$ . Soit  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . D'après Théorème 3.5,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

pour tout  $z$  tel que  $|z-a| < r$ . Puisque  $|z-a| < r$  et  $|w-a| = r$

$$\frac{|f(w)| |z-a|^n}{|w-a|^{n+1}} \leq \frac{M}{r} \left( \frac{|z-a|}{r} \right)^n$$

où  $M = \max\{|f(w)| : |w-a| = r\}$ . Puisque  $\frac{|z-a|}{r} < 1$ , la critère de Weierstrass §Théorème 3, entraîne la convergence uniforme de la série  $\sum f(w) \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$  pour tout  $|w-a| = r$ . On en déduit le résultat des calculs précédants.  $\square$

**Corollaire 3.7** : Soit  $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  holomorphe, alors  $f$  est infiniment différentiable.

**Corollaire 3.8** : Soit  $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  holomorphe telle que  $\overline{D(a, r)} \subset U$ , alors

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw,$$

où  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Corollaire 3.9 (inégalité de Cauchy) : Soit  $f$  holomorphe dans  $D(a, R)$  et supposons que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z$  dans  $D(a, R)$ , alors

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!M}{R^n}.$$

Théorème 3.10 (Théorème de Liouville) : Une fonction holomorphe entière (holomorphe sur tout  $\mathbf{C}$ ) et bornée est toujours constante.

Preuve : Soit  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \mathbf{C}$ . Par le corollaire précédant

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$$

pour tout  $R$  et donc  $f'(z) \equiv 0$  pour tout  $z \in \mathbf{C}$ , d'où  $f$  est constante.  $\square$

Théorème 3.11 (Théorème fondamental d'algèbre) : Soit  $p(z)$  un polynôme non-constant, alors il existe un nombre complexe  $a$  tel que  $p(a) = 0$ .

Preuve : Supposons au contraire que  $p(z) \neq 0$  pour tout  $z$  et soit  $f(z) = 1/p(z)$ . Puisque  $f(z)$  est bornée et entière, par le Théorème de Liouville, elle est constante, une contradiction.  $\square$

Soit  $f : U \subset \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  holomorphe et soit  $a \in U$  un point tel que  $f(a) = 0$ , alors on dit que  $a$  est un zéro de  $f$  de multiplicité  $m \geq 1$  s'il existe une fonction holomorphe  $g : U \rightarrow \mathbf{C}$  tel que  $f(z) = (z - a)^m g(z)$  avec  $g(a) \neq 0$ .

Corollaire 3.12 : Soit  $p(z)$  un polynôme de degré  $n$ , alors

$$p(z) = c(z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_m)^{k_m}$$

où  $c$  est constante et  $k_1 + \cdots + k_m = n$ .

Preuve : On applique le Théorème 3.11 et la récurrence.  $\square$

Théorème 3.13 : Soit  $U \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  holomorphe. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f \equiv 0$  ;
- (ii) il existe  $a \in U$  tel que  $f^{(n)}(a) = 0$  pour tout  $n \geq 0$  ;
- (iii)  $\{z \in U : f(z) = 0\}$  présente un point d'accumulation dans  $U$ .

Preuve : C'est évident que (i)  $\Rightarrow$  (ii) et (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii) : Soit  $a \in U$  un point d'accumulation de  $Z := \{z \in U : f(z) = 0\}$  et supposons que  $R > 0$  est tel que  $D(a, R) \subset U$ . Alors  $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z-a)^k$  pour  $|z-a| < R$ . (ii) est une conséquence de l'unicité des séries entières : Théorème 5 de §1.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) : Soit  $A = \{z \in U : f^{(n)}(z) = 0 \forall n \geq 0\}$ . Par hypothèse  $A \neq \emptyset$ . On montre que  $A$  est à la fois ouvert et fermé dans  $U$ .

Soit  $z \in \overline{A} \cap U$  et soit  $(z_k)$  une suite dans  $A$  telle que  $z = \lim z_k$ . Puisque chaque  $f^{(n)}$  est continue on voit que  $f^{(n)}(z) = \lim f^{(n)}(z_k) = 0$ , donc  $z \in A$  et  $A \cap U = \overline{A} \cap U$ . D'autre part soit  $a \in A$  et soit  $R > 0$  tel que  $D(a, R) \subset U$ . Alors  $f(z) = \sum a_n(z-a)^n$  pour  $|z-a| < R$  où  $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) = 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Donc  $f(z) = 0$  pour tout  $z$  dans  $D(a, R)$  et  $D(a, R) \subset A$  et par suite  $A$  est ouvert.  $\square$

**Théorème 3.14** (Principe du maximum) : Soit  $U \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe et soit  $f : U \rightarrow \mathbf{C}$  une fonction holomorphe telle qu'il existe un point  $a \in U$  tel que  $|f(a)| \geq |f(z)|$  pour tout  $z \in U$ . Alors  $f$  est constante.

Preuve : Soit  $r > 0$  tel que  $\overline{D(a, r)} \subset U$  et soit  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Théorème 3.5 entraîne que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-a} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt$$

Puisque  $|f(a + re^{it})| \leq |f(a)|$  pour tout  $t$ , il s'ensuit que

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt \leq |f(a)|$$

Donc

$$0 = \int_0^{2\pi} (|f(a)| - |f(a + re^{it})|) dt$$

et  $|f(a)| = |f(a + re^{it})|$ . Puisque  $r$  est quelconque, on voit que pour  $D(a, R) \subset U$ , on a  $f(D(a, R)) \subset \{z \in \mathbf{C} : |z| = |\alpha|\}$  où  $\alpha = f(a)$ , ce qui entraîne  $f$  constante dans  $D(a, R)$  ( $f\bar{f} = c \Rightarrow \bar{f} \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z} = 0$  dans  $D(a, R)$ ). En particulière  $f(z) = \alpha$  pour  $|z-a| < R$ . Pour conclure, on applique le théorème 3.13 à la fonction  $f(z) - \alpha$ .  $\square$