Variable complexe – Paul Baird

§2. Fonctions holomorphes

C–différentiabilité : Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $f : U \to \mathbf{C}$ est dite différentiable au sens complex, **C**–différentiable ou encore dérivable, en un point $a \in U$ si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe ($h \in \mathbf{C}$). La limite s'appelle la dérivée de f en a et s'écrit $f'(a)$, ou $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$.

<u>Théroème 2.1</u>: La fonction f est **C**–différentiable en a si et seulement si il existe une fonction $p : U \to \mathbf{C}$ continue en a telle que

$$f(z) = f(a) + (z - a)p(z)\,.$$

On a alors $f'(a) = p(a)$.

<u>Exemples</u> : (i) $f(z) = z^n$ $(n \geq 1)$ est dérivable en chaque point de **C** et $f'(a) = na^{n-1}$

(ii) $f(z) = \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point de **C**, pourtant $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (x, -y)$ est **R**–dérivable.

Les équations de Cauchy-Riemann : Soit $U \subset \mathbf{R}^2$ un ouvert. Une fonction $u : U \to \mathbf{R}$ est **R**–différentiable en $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ si les dérivées partielles existent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(a, b) &= \lim_{h \to 0} \frac{u(a + h, b) - u(a, b)}{h} \\ \frac{\partial u}{\partial v}(a, b) &= \lim_{k \to 0} \frac{u(a, b + k) - u(a, b)}{k} \end{aligned}$$

Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des nombres réels λ et μ et $\delta > 0$, tels que pour $h, k \in \mathbf{R}$ avec $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ on a

$$|u(a + h, b + k) - u(a, b) - (\lambda h + \mu k)| \leq \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}\,.$$

où $\lambda = \frac{\partial u}{\partial x}(a, b)$ et $\mu = \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)$. Une fonction $F : U \to \mathbf{R}^2$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ est **R**–différentiable si et seulement si u et v sont **R**–différentiable.

<u>Théorème 2.2</u> : Soit $f : U \to \mathbf{C}$ ($U \subset \mathbf{C}$ ouvert). Soit $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y)$ et $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(x + \mathrm{i}y)$. Alors f est **C**–différentiable en $a + \mathrm{i}b \in U$ si et seulement si

(i) u et v sont **R**–différentiable en (a, b) ; et

(ii) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a, b)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(a, b) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(a, b)$.

Dans ce cas $f'(a + \mathrm{i}b) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(a, b) + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(a, b) - \mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}(a, b)\,.$

Preuve : Soit $f'(a+\mathrm{i}b) = \lambda + \mathrm{i}\mu$. Alors quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $h, k \in \mathbf{R}$, $|h+\mathrm{i}k| < \delta$ entraîne

$$|f(a+h+\mathrm{i}(b+k)) - f(a+\mathrm{i}b) - (\lambda+\mathrm{i}\mu)(h+\mathrm{i}k)| \leq \varepsilon|h+\mathrm{i}k| = \varepsilon\sqrt{h^2+k^2}\,,$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} |u(a+h,b+k) - u(a,b) - (\lambda h - \mu k)| &\leq \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \\ |v(a+h,b+k) - v(a,b) - (\mu h + \lambda k)| &\leq \varepsilon\sqrt{h^2+k^2} \end{aligned} \tag{1}$$

Donc u, v sont $\mathbf{R}$–différentiable en (a,b) et

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial u}{\partial x}(a,b) &= \tfrac{\partial v}{\partial y}(a,b) = \lambda \\ -\tfrac{\partial u}{\partial y}(a,b) &= \tfrac{\partial v}{\partial x}(a,b) = \mu \end{aligned}$$

Reciproquement, supposons (i) et (ii) et écrivons

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b), \quad \mu = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial x}(a,b)\,.$$

Alors $\forall\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que les inégalités (1) sont vérifiées pour tout $h, k \in \mathbf{R}$ avec $\sqrt{h^2+k^2} < \delta$. Dans ce cas

$$|f(a+h+\mathrm{i}(b+k)) - f(a+\mathrm{i}b) - (\lambda+\mathrm{i}\mu)(h+\mathrm{i}k)| \leq 2\varepsilon|h+\mathrm{i}k| = 2\varepsilon\sqrt{h^2+k^2}\,,$$

ce qui montre que $f'(a+\mathrm{i}b)$ existe et égale $\lambda + \mathrm{i}\mu$. $\square$

Les équation (ii) s'appellent les équations de Cauchy–Riemann.

Exercice : Trouver les points de $\mathbf{C}$ où $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$ est $\mathbf{C}$–différentiable.

Notation : On introduit les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

d'où

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{i}v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)$$

Donc si f est $\mathbf{C}$–différentiable $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\dfrac{\partial v}{\partial x} = f'$. En plus

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\mathrm{i}v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right) = 0$$

si et seulement si les équation de Cauchy-Riemann sont vérifiées.

Théorème 2.3 : f est $\mathbf{C}$–différentiable en un point a si et seulement si f est $\mathbf{R}$–différentiable en ce point et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$. Dans ce cas $f'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(a)$.

Fonctions holomophes : Une fonction f est *holomorphe* en un point $a \in \mathbf{C}$ si elle est $\mathbf{C}$–différentiable dans un voisinage de a, c'est à dire $\partial f/\partial \overline{z} = 0$ dans un voisinage de a. On dit que f est *anti-holomorphe* en a si $\partial f/\partial z = 0$ dans un voisinage de a.

Exemple : La fonction $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$ est $\mathbf{R}$–différentiable en tout point de $\mathbf{C}$. Or $\partial f/\partial \overline{z} = z$ est nulle que au point $z = 0$, donc f n'est nulle part holomorphe.

Si f est dérivable dans u alors $f'(z)$ d'efinit une fonction $f' : U \to \mathbf{C}$. Si f' est continue on dit que f est continuement différentiable. Si f' est dérivable alors f est deux fois dérivable... etc. Si chaque dérivée complexe existent et est continue on dit que f est infiniment différentiable.

Chaque fonction f qui s'exprîme comme $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ dans un voisinage de $a \in \mathbf{C}$ est dite *analytique* en a. Fait remarquable : chaque fonction holomorphe en a est infiniment différentiable en a et en plus elle est analytique en a.

Une fonction f est holomorphe en $\infty \in \mathbf{C}_\infty$ si la fonction $g(z) = f(1/z)$ est holomorphe au point $z = 0$. Par exemple, la fonction $f(z) = 1/z^2$ est holomorphe à l'infini puisque $g(z) = z^2$ l'en est au point $z = 0$.

Applications conformes : Soit $F : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (U ouvert), $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, et soit $(x_0, y_0) \in U$. Alors la dérivée de F est l'application $F_* = F_*(x_0, y_0) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ donnée par

$$F_*(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

où les dérivées partielles sont calculées en (x_0, y_0). Une telle application est dite conforme si sa dérivée existe, est non-nulle et continue et conserve les angles.

Exercices : 1. Soit $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ les vecteurs canoniques ; donc $F_*e_1 = (u_x, v_x)$ etc. Montrer que F_* conserve les angles si et seulement si

(i) $F_*e_1 \cdot F_*e_2 = 0$; et

(ii) $||F_*e_1|| = ||F_*e_2||$ en chaque point.

2. Montrer que $f : U \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est conforme si et seulement si soit $\partial f/\partial z \neq 0$ soit $\partial f/\partial \overline{z} \neq 0$ en chaque point et f est holomorphe ou anti-holomorphe.

Si f est conforme sauf à des points isolés où sa dérivée s'annulle on dit que f est faiblement conforme.

Fonctions homographiques : $w = (az+b)/(cz+d)$, $ad - bc \neq 0$, où a, b, c, d sont des nombres complexes fixés définies à un multiple près. La condition $ad - bc \neq 0$ exclut le cas constant (le numérateur est proportionel au dénominateur). On prolonge w dans la sphère de Riemann en posant

$$w = \infty \quad \text{pour} \quad z = -d/c$$
$$w = a/c \quad \text{pour} \quad z = \infty$$

(si $c = 0$ on pose $w = \infty$ pour $z = \infty$).

Théorème 2.4 : Toute fonction homographique réalise un homéomorphisme de $\mathbf{C}_\infty$ dans $\mathbf{C}_\infty$.

Preuve :

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z = \frac{dw-b}{a-cw}$$

et par suite $w : \mathbf{C}_\infty \to \mathbf{C}_\infty$ possède un reciproque (qui se prolonge aux points $z = \infty, -d/c$) ce qui montre qu'elle est bijective. La continuité de w est partout évidente sauf aux points $z = -d/c, \infty$; mais elle en résulte aussi en ces points car

$$\lim_{z\to -d/c} \frac{az+b}{cz+d} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\,.$$

□

Exercices : 1. Toute fonction homographique est la composée des applications suivantes:

- $z \mapsto z + c$: translation ;
- $z \mapsto 1/z$: inversion ;
- $z \mapsto be^{\mathrm{i}\theta} z$: similitude (rotation et dilatation).

2. Une application homographique est déterminée par son effet sur trois points distincts de $\mathbf{C}_\infty$.

La fonction exponentielle : Trois définitions équivalentes :

$$e^z := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n, \quad e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

La fonction exponentielle est $\mathbf{C}$–différentiable partout et vérifie les propriétés suivantes:

(i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

(ii) $e^{z+2\pi\mathrm{i}} = e^z e^{2\pi\mathrm{i}} = e^z$;

(iii) $\frac{\partial e^z}{\partial z} = e^z$.

Exercice : Est-ce-que $\lim_{z\to 0} e^{1/z}$ existe ?

A partir de la fonction exponentielle on définit les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z}}{2i}, \quad \cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$$

On en déduit que

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \cos z = \sin(z+\frac{\pi}{2}),$$
$$\cos(x+\mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y, \qquad \text{etc.}$$

et que

$$\cosh z = \cos \mathrm{i}z, \quad \sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z, \quad \cos z = \cosh \mathrm{i}z, \quad \sin z = -\mathrm{i}\sinh \mathrm{i}z$$

Différentiation des séries entières :

Théorème 2.5 : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ pour $|z-a| < R$, où $R > 0$. Alors $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-a)^{n-1}$ pour $|z-a| < R$. En particulier f est holomorphe dans le disque $|z-a| < R$.

On omet la preuve qui est comme celle pour les séries entières réelles.

On posant $z = a$ on en déduit que $f'(a) = a_1$, et par récurrence que $f^{(n)}(a) = n!a_n$.

La fonction logarithme : Dans quel sens peut-on choisir l'argument d'un nombre complexe d'une manière continue ? Ce n'est pas possible dans $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Pour chaque $\alpha \in \mathbf{R}$ on définit la demi-droite $L_\alpha = \{-re^{\mathrm{i}\alpha} : r \geq 0\}$. On se rappelle qu'un ensemble $U \subset \mathbf{C}$ est étoilé autour du point $a \in U$ si pour chaque $z \in U$, le segment droit joignant a à z est contenue dans U. Alors $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$ est ouvert et étoilé autour de $e^{\mathrm{i}\alpha}$.

Pour $z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha$ on définit $\arg_\alpha(z)$ comme l'argument unique de z dans l'intervalle $(\alpha-\pi, \alpha+\pi)$.

Théorème 2.6 : La fonction $\arg_\alpha$ est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$. Si θ est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$ telle que pour chaque z, $\theta(z)$ est un argument de z, alors il existe un entier k tel que $\theta(z) = \arg_\alpha(z) + 2k\pi$ pour tout $z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha$.

On dit qu'un nombre complexe w vérifiant $e^w = z$ est un logarithme de z. Alors chaque nombre z réel et positif possède un logarithme unique $\ln x$. C'est claire que les logarithmes de z sont les nombres $\ln|z| + \mathrm{i}t$ où t et un argument de z.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On définit

$$\ln_\alpha(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg_\alpha(z), \quad z \in \mathbf{C} \setminus L_\alpha\,.$$

Par le théorème 2.6, $\ln_\alpha$ est continue dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$, et il est la fonction reciproque de exp sur

$$\{x + \mathrm{i}y : \alpha - \pi < y < \alpha + \pi\}$$

donc, d'après la loi pour la dérivée de la fonction reciproque on en déduit que

$$(\ln_\alpha)'(z) = \frac{1}{z}$$

dans $\mathbf{C} \setminus L_\alpha$.

<u>Exercice</u> : Montrer que dans le disque $|z| < 1$, on a

$$\ln_0(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \, .$$

La fonction zeta de Riemman : Il s'agit de la fonction

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \, .$$

<u>Exercice</u> : Montrer que la somme converge absolument pour $|z| > 1$; calculer la dérivée $\zeta'(z)$ pour $|z| > 1$.