Feuille 7 - Séries entières

Rappels : Une série entière est une série de la forme $S(x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ où (a_n) est une suite numérique.

• Il existe un nombre $R \in [0, \infty]$ appelé rayon de convergence, tel que $S(x)$ converge pour $|x| < R$; diverge pour $|x| > R$; si $|x| = R$, elle peut converger ou diverger.

• La série converge normalement sur tout intervalle compact $[-r, r]$ pour $r < R$ (R rayon de convergence).

• Si la série converge en x_0, elle converge absoluement pour tout x avec $|x| < |x_0|$.

• La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

• On applique des testes de convergence (d'Alembert, de la n-ième racine) pour déterminer le rayon de convergence.

I. Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\ ; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n!x^n\ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}x^n\ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{3}{n}\right)x^n\ ; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$$

II. Ecrire la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+2x^2}$ sous forme de série entière : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Quel est son rayon de convergence ?

III. Ecrire la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(2-x)}$ sous forme de série entière : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Quel est son rayon de convergence ? (Indication : décomposer $f(x)$ en éléments simples).

IV. Soit f la fonction représentée par la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)!}\,.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série ?
2. Exprimer en séries entières les dérivées $f'(x)$ et $f''(x)$.

3. Montrer que la fonction $f(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$4xf''(x) + 6f'(x) + f(x) = 0 \,.$$

4. Estimer la valeur $f(0.1)$ à une erreur de 10^{-2} près.

V. Soit f la fonction représentée par la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n} \,.$$

1. Quel est le rayon de convergence de la série ?
2. Exprimer en série entière la dérivée $f'(x)$.
3. Montrer que la fonction $f(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$f'(x) + xf(x) = 0 \,.$$

4. Estimer la valeur $f(0.1)$ à une erreur de 10^{-3} près.

VI. Développer en série entière les fonctions (a) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $\ln(1+x)$; (c) $\arctan x$. Quels sont les rayons de convergence en chaque cas ?

VII. 1. Calculer $\ln(1.1)$ à cinq places de décimales près (sans utiliser un calculatrice !)
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{0.1} e^{-x^2} \mathrm{d}x$ à cinq places de décimales près.