Université de Bretagne Occidentale — L2 Mathématiques et Economie

Faculté des Sciences et Techniques — Analyse 2

Département de Mathématiques — *Année 2019-2020*

Feuille 2 - séries numériques suite

Rappels : • On appelle série alternée une série numérique $\sum_n a_n$ dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} v_n$ où v_n est une suite de nombres positifs.

• Si la suite (v_n) est décroissante convergeant vers zéro, alors la série alternée converge et dans ce cas, si on pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, sa somme $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ vérifie

$$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p} \quad \text{si} \quad u_0 \geq 0$$

et

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1} \quad \text{si} \quad u_0 \leq 0$$

• Critère d'Abel : Soit (v_n) une suite numérique ou complexe telle que la suite $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ soit bornée ; et soit (ε_n) une suite de nombres positifs, décroissante et tendant vers zéro. Alors la série $\sum \varepsilon_n v_n$ est convergente.

Exercice I: (Critère d'Abel). Pour un nombre α avec $0 < \alpha < 2\pi$, montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n}$$

est convergente. (Indication : $\cos n\alpha = \operatorname{Re} e^{in\alpha}$ - calculer $S_n = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cdots + \cos n\alpha$.)

Exercice II: Discutez de la convergence des séries suivantes :

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{-n}$,

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$,

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n}} - 1)^n$,

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{|\cos \frac{1}{n^3}|^n}$,

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$.

Exercice III: Montrer la convergence et calculer la sommes des séries suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$,

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda}, \quad \lambda \in \mathbf{R},$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n},$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} - e^{-(n+1)}.$