L2 Intégrale de Riemann et Probabilités - 2016

Feuille 8 : Dénombrement et l'univers des expériences

Exercice I: On lance une pièce trois fois et on considère les événements suivants :

A : "pile apparaît exactement deux fois" ;

B : "pile apparaît au moins deux fois" ;

C : "pile apparaît quand face est apparu au moins une fois" .

Exprimer Ω, A, B et C ainsi que $A^c \cap B, A^c \cap B^c$ et $A \cap C$, où A^c désigne le complément de A.

Exercice II: Exprîmer chacun des événements suivants à l'aide des événements A, B et C et des opérations de réunion, intersection et complémentation :

1. au moins un des trois événements a lieu ;
2. au plus un des trois événements a lieu ;
3. aucun des trois éventments a lieu ;
4. les trois événements ont lieu ;
5. exactement un seul des trois événements a lieu ;
6. A et B ont lieu, mais pas C ;
7. A a lieu, sinon B n'a pas lieu non plus.

Exercice III : Dans chacun des cas suivants, donner le nombre d'éléments de Ω et des événements considérés :

1. Une famille a 4 enfants. A : "les filles et les garçons sont alternés" ; B : "le premier et le quatrième sont des garçons" ; C : "il y a autant de filles que de garçons" ; D : "il y a au moins 3 enfants en suivant du même sexe".

2. Un représentant doit visiter deux fois trois villes a, b et c. A : "il visite a en premier et en dernier".

3. Un ascenseur porte deux personnes et il y a trois niveaux. A : "elles s'arrêtent à deux niveaux différents" ; B : "une personne au moins s'arrête au premier niveau".

Exercice IV : Combien de façons peut-on arranger sept perles de couleur differente (a) sur un fil droit ; (b) sur un collier circulaire ?

Exercice V : Combien de mains différentes de cinq cartes peut-on distribuer d'un paquet de 52 ?

Exercice VI : Dans un lotto, troix prix sont distribués de valeurs strictement decroissantes. Les gagnants sont tirés d'un chapeau. S'il y a 15 participants, combien de différents combinaisons de gagnants sont possibles ?

Exercice VII : 1. Montrer que le nombre de façons qu'on peut diviser N objets en r groupes de taille $n_1, n_2, \ldots, n_r$ est

$$\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

Exercice VIII : 1. Montrer que le nombre de façons qu'on peut placer r objets indiscernables dans n conteneurs distincts est

$$\begin{pmatrix} n+r-1 \\ r \end{pmatrix}$$

(indication : on peut modéliser les conteneurs en ajoutant $(n-1)$ barrières entre les r objets).

2. On répète le problème avec la condition que chaque conteneur doit contenir au moins m objets (donc $r > nm$). Montrer que quand $m = 1$, le nombre de façons est

$$\begin{pmatrix} r-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

Exercice IX : On jette trois dés. On note X la somme des points obtenus (exemple d'une variable aléatoire). Calculer la probabilité d'avoir $X = 11$ et $X = 12$.

Exercice X : Trois boules bleues et trois boules rouges sont placées dans un conteneur. On tire successivement deux boules sans remplacer la première. Quel est l'univers Ω associé aux différentes épreuves ?

1. Quel est la probabilité que la première boule soit rouge ?
2. Quel est la probabilité que la première boule soit rouge et la deuxième boule soit bleue ?
3. Quel est la probabilité que les deux boules sont de la même couleur ?