L2 Intégrale de Riemann et Probabilités - 2016

Feuille 11 : probabilité conditionnelle, formule de Bayes, lois diverses, espérance, variance

Exercice I : Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte au hasard. Calculer la probabilité que la carte tirée soit un roi sachant que l'événement “la carte tirée est une pique” est réalisé.

Exercice II : Un dé est jeté 3 fois successivement et les résultats des 3 expériences sont tous différents. Quelle est la probabilité qu'il y ait un as ?

Exercice III : Un sac contient 7 billes rouges, 5 billes blanches et 3 billes noires. On tire successivement 3 billes. Quelle est la probabilité pour que la première bille tirée soit rounge, la deuxième blanche et la troisième noire si chaque bille est : 1. remise dans le sac après tirage ; 2. non remise dans le sac.

Exercice IV : Soient A_1 et A_2 deux ensembles de boules. On suppose que A_1 contient 75% de boules blanches et que A_1 en contient 50%. En outre, on suppose que A_1 contient 3 fois plus de boules que A_1. On place les boules de A_1 et de A_2 dans une même urne et on en tire au hasard: on constate qu'elle est blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de A_1 ? Résoudre la question directement, puis à l'aide de la formule de Bayes. (Indication : soit A l'événement “la boule provient de A_1” et B “la boule est blanche”).

Exercice V : (Formule de Bayes). Une maladie M affecte un français sur mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte M avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,2% des personnes saines testées. Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ?

Exercice VI : (Formule de Bayes). Des pièces mécanique sont fabriquées en grande série. On effectue un test sur chacune d'elles pour en contrôler la qualité. On appelle p la probabilité pour qu'une pièce choisie au hasard soit bonne ; a la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui est effectivement bonne ; b la probabilité pour que le test indique comme bonne une pièce qui en réalité est mauvaise.

1. Calculer la probabilité pour qu'une pièce indiquée par le test comme bonne soit effectivement bonne.

2. A quelle condition le test est-il utile ? (C'est ̀dire, à quelle condition cette probabiilité est-elle supérieure à p?)
(Indication : Soit B l'événement "la pièce est bonne" et T "le test indique la pièce comme bonne".)

Exercice VII : On lance 2 dés et on appelle Z la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des numéros obtenus. Déterminer la loi de Z, sa fonction de répartition, son espérance et sa variance.

Exercice VIII : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire toutes les boules une par une sans remise et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules dont le rang de sortie est égale au numéro. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}\,(X)$. (Indication : soit X_i la variable aléatoire telle que $X_i = 1$ si la i-ième boule tirée est à la place i, et $X_i = 0$ sinon. Remarquer que $X = X_1 + \cdots + X_n$).

Exercice IX : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On en tire 2 au hasard sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au plus grand numéro tiré.

1. Calculer $P[X \leq k]$ et en déduire la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice X : La loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est donnée par $X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$;
$P[X = k] = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) p^k(1-p)^{n-k}$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $p \in]0,1[$, et soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit Y par $Y = X$ si $X \neq 0$ et, si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $\{0, 1, \ldots, n\}$. Déterminer la loi de Y et calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice XI : La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est donnée par $X(\Omega) = \mathbf{N}$; $P[X = k] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \in \mathbf{N}$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(1/(1+X))$.

Exercice XII : La loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$ est donnée par $X(\Omega) = \mathbf{N} \setminus \{0, \ldots, r-1\}$;
$P[X = k] = \left(\begin{array}{c} k-1 \\ r-1 \end{array} \right) p^r(1-p)^{k-r}$ pour $k \geq r$.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Pascal $\mathcal{P}(r,p)$. Montrer que $\mathbb{E}((r-1)/(X-1)) = p$ et en déduire $\mathbb{E}(r/X) > p$.

Exercice XIII : Une suite d'épreuves de Bernoulli de paramètre p est répétée de façon indépendante jusqu'à l'obtention de k succès. Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais nécessaires. Déterminer la loi de X et calculer $\mathbb{E}(X)$.