Feuille 1 - Sommes de Riemann

Rappel : • Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$; soit $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ une subdivision quelconque de cet intervalle ; et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ soit ξ_i un point de l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. A ces données on attache la *somme de Riemann*

$$S(f, \sigma, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)\,.$$

• Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a, b]$ telle que f soit constante sur chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$ (même notation que dans le point précedant). Une fonction en escalier prend un nombre fini de valeurs.
• pour une telle fonction, son intégrale sur $[a, b]$ est définie par

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f_i$$

où f_i est la valeur constante de f sur l'intervalle $]x_{i-1}, x_i[$.
• Soit f une fonction continue et soit σ_n la subdivision $\sigma_n = (x_0 = a, x_1 = a + \frac{b-a}{n}, x_2 = a + 2\frac{b-a}{n}, \ldots, x_n = b)$. Alors $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S(f, \sigma_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Exercice I : Soit f la fonction définie sur $[0, 4]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ 3 & \text{si} \quad x = 1 \\ -2 & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 2 \\ 4 & \text{si} \quad 2 < x \leqslant 4 \end{cases}$$

Vérifier que f est une fonction en escalier. Donner deux subdivisions σ et σ' adaptées à f. Montrer que $\int_0^4 f(x)dx$ ne dépend pas du choix de σ et σ' et calculer sa valeur.

Exercice II : (a) Arranger de deux façons différents la somme $\sum_{k=1}^{n} (k + 1)^3 - k^3$.
(b) En déduire une expression simple de la somme des n premiers carrés.
(c) Déduire du point précédent $\int_0^1 x^2 dx$

Exercice III : On considère la fonction $f(x) = x^3$ sur $[0, 1]$. On se propose de calculer l'aire A comprise entre le graphe de f et l'axe des x sur l'intervalle $[0, 1]$.
(a) Dessiner le graphe de f sur $[0, 1]$.
(b) Découper $[0, 1]$ en n sous-intervalles de taille $1/n$. Puis sur chaque segment $[\frac{k}{n}, \frac{k}{n+1}]$ dessiner les rectangles de hauteurs $(k/n)^3$ et $k/(n + 1))^3$ respectivement.

SUITE...

On pose

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \\ S_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^3 + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3 \end{aligned}$$

(c) Que représente les sommes s_n et S_n ?
(d) Montrer par récurrence sur n que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

(e) Calculer explicitment s_n et S_n et en déduire l'aire A.

Exercice IV : Montrer que la somme, la multiplication par un scalaire et le produit de deux fonctions en escalier sont des fonctions en escalier.

Exercice V : (a) Comprendre pourquoi pour une fonction f continue, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) = \int_0^1 f(x)dx\,.$$

(b) Quelle est la limite de la somme suivante quand n tend vers $+\infty$?

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\,.$$

(c) On se donne un nombre réel $\alpha > 0$. Montrer que la suite

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

est une suite convergente et calculer sa limite.

Exercice VI : On considère la suite dont le terme général u_n est donné par

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{(k/n)}$$

Montrer que u_n est une suite convergente et calculer sa limite de deux façons différentes. En déduire $\int_0^1 e^x dx$.