Feuille 7 - Intégrales multiples

On calcule des intégrales de la forme : $\int\int_D f(x,y)\,dxdy$ où D est un domaine du plan et f est une fonction de deux variables. La façon qu'on fait ce calcul dépend du domaine D. Par exemple, pour un domain délimité par deux courbes $y = \alpha(x)$ et $y = \beta(x)$, d'abord on fixe x et on intègre par rapport à y et puis on calcule l'intégrale simple par rapport à x qui en résulte :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_{x=a}^{x=b} \left\{ \int_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

On peut indiquer cet ordre de calcul en écrivant

$$\int_{x=a}^{x=b} dx \int_{y=\alpha(x)}^{y=\beta(x)} f(x,y)dy$$

Le théorème de Fubini permet d'interchanger l'ordre d'intégration (en soigneusement calculant les nouvelles limites d'intégration). Lorsque $f(x,y) = 1$, le calcul donne l'aire de D.

La formule pour un changement de variable prend la forme :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\widetilde{D}} F(u,v) \left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

où $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ est la matrice jacobienne :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et $\widetilde{D}$ est le domaine corréspondant à D en termes de u et de v (il y a des conditions à vérifier afin d'appliquer cette formule, par exemple, que le changement de variables soit une bijection différentiable). Cas spécial des coordonnées polaires :

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\widetilde{D}} F(r,\theta)rdrd\theta\,.$$

Exercice I : Soit D le domaine : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$. Calculer $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants : a) $f(x,y) = x^2 + y^2$; b) $f(x,y) = xy(x+y)$.

Exercice II : Calculer l'intégrale double suivante $\int\int_D f(x,y)dxdy$, avec

1. $f(x,y) = x$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant 0, x-y+1 \geqslant 0, x+2y-4 \leqslant 0\}$.
2. $f(x,y) = x+y$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, x^2 \leqslant y \leqslant x\}$.
3. $f(x,y) = \cos(xy)$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant xy \leqslant \pi/2\}$.
4. $f(x,y) = xy$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, xy+x+y \leqslant 1\}$.
5. $f(x,y) = 1/(x+y)^3$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 3, y > 2, x+y < 5\}$.

Exercice III : Soit D le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } x^2 \leqslant y \leqslant 4 - x^3\}$$

Calculer l'aire de D.

Exercice IV : On pose $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, x^2+y^2 \geqslant 1\}$. Calculer

$$\int\int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy$$

Exercice V : (triple intégrale dans l'espace). On se propose de calculer

$$I = \int\int\int_D x\, dxdydz\,.$$

où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0, x+y+z < 1\}$. On note T_z l'intersection de D et le plan P_z de cote z.

1. Déterminer pour quelles valeurs de z l'ensemble T_z est non-vide.
2. Pour une valeur de z fixée telle que T_z est non-vide calculer

$$I_z = \int_{(x,y)\in T_z} x dxdy\,.$$

3. En déduire la valeur de I.
4. Etudier l'intersection $D_{x,y}$ de D et d'une droite d'équation $X = x$, $Y = y$, où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Retrouver la valeur de I.

Exercice VI : (coordonnées polaires). Calculer l'intégrale double

$$\int\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$$

où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Exercice VII : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$. Calculer

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2} dxdy\,.$$

Exercice VIII : a) Montrer que si D est un domaine rectangulaire : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ et $f(x,y) = g(x)h(y)$ est un produit, alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$$

b) En effectuant un changement de variables en coordonnées polaires, calculer

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice IX : (changement de variables plus général) Calculer les intégrales doubles $\int\int_D f(x,y)dxdy$ dans les cas suivants, en suivant le changement de variables indiqué :

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^{2/3} + y^{2/3} \leqslant 1\}$ et $f(x,y) = xy$.
On posera $x = r\cos^3\theta$ et $y = r\sin^3\theta$.

2. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y, a < xy < b, y^2 - x^2 < 1\}$ et $f(x,y) = (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)$.
On posera $u = xy$ et $v = y^2 - x^2$.

Exercice X : Soit $D = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\}$ où a, b sont des réels strictement positifs. Calculer l'intégrale

$$J = \int\int_D (2x^3 - y)dxdy\,.$$

Exercice XI : Déterminer le volume intérieur à l'ellipsoide d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

où a, b et c désignent trois réels strictement positifs.

Exercice XII : Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1,\infty[$, on a

$$\ln(1+x) = \int_0^1 \frac{x}{1+xy}dy\,.$$

En déduire que $I = \displaystyle\int\int_D \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}dxdy$, où D est le pavé $[0,1]^2$.

2. En inversant les rôles de x et y, montrer que

$$2I = \int\int_D \frac{(x+y)}{(1+x^2)(1+y^2)}dxdy\,.$$

En déduire que $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.