Université de Bretagne Occidentale — L2-Maths/PMRC
*Faculté des Sciences et Techniques* — Intégrale de Riemann et probabilités
Département de Mathématiques — *Année 2016-2017*

Feuille 6 - Intégrales généralisées

Soit $f$ une fonction localement intégrable (intégrable sur tout sous-intervalle fermé) sur un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ de $\mathbb{R}$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$. On dit que l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ est convergente si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leqslant x < b)$$

a une limite quand $x$ tend vers $b$ ; cette limite est appelée intégrale généralisée de $f$ sur $[a,b[$. Si cette limit n'existe pas on dit que l'intégrale de $f$ sur $[a,b[$ est divergente. Par analogie, on définit une intégrale généralisée sur $]a,b]$ ou sur $]a,b[$.

**Exercice I :** Déterminer la nature des intégrales suivantes et les calculer lorsqu'elles convergent :

$$\int_0^1 \ln(x)\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int_0^1 \frac{x}{(x-1)^2}dx \qquad \int_0^{\pi/2} \tan x\,dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2\sqrt{1-x^4}} \qquad \int_0^\infty e^{-x}dx \qquad \int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^2}dx \qquad \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}dx \qquad \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^\alpha}dx$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\ln x} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \qquad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x}dx \qquad \int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x})\right)dx$$

**Exercice II :** Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \sin x\,\sin\frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{x}\,\sin\frac{1}{x}\,dx \qquad \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx, \quad \alpha > 0$$

$$\int_{2/\pi}^\infty \ln(\cos\frac{1}{x})dx \qquad \int_{2/\pi}^\infty \ln(\sin\frac{1}{x})dx \qquad \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx \qquad \int_0^\infty \frac{1}{\sin x^\alpha}dx, \quad \alpha > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{1+x}e^{-x}\,dx \qquad \int_0^\infty x^\alpha e^{-\lambda x}dx,\ \alpha,\lambda > 0 \qquad \int_0^1 \frac{1-e^x+a\sin x}{x^2}dx,\ a > 0 \qquad \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

SUITE...

**Exercice III :** Prouver que l'intégrale généralisée $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge si et seulement si, pour toute suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et telle que $a_0 = a$ et $a_n > a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx$$

converge. De plus, en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx\,.$$

**Exercice IV :** Pour $a$ strictement positif, étudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^a \sin^2 x}\,.$$