Université de Bretagne Occidentale L2-Maths/PMRC
Faculté des Sciences et Techniques Intégrale de Riemann et probabilités
Département de Mathématiques *Année 2016-2017*

Feuille 5 - Inégalité de Caucy-Schwarz

Si f, g sont deux fonctions à valeurs réelles ou complexes intégrables sur l'intervalle $[a, b]$, elles vérifient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right|^2 \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)$$

De plus, si f et g sont continues, l'inégalité se transforme en égalité que si on a $f = 0$ ou s'il existe une constante complexe k telle que l'on ait $g(x) = k\overline{f(x)}$ pour tout $x \in [a, b]$.

Exercice I : (a) Soient p, q réels > 0 vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Déterminer le minimum de la fonction

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}\,.$$

En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}\,.$$

(b) On désigne par $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$, $2n$ nombres réels ou complexes ; et on pose

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}, \quad \beta = \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}.$$

Montrer à l'aide du (a) que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ on a :

$$\frac{|a_i b_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|a_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|b_i|^q}{q\beta^q}\,.$$

(c) Soient f, g deux fonctions numériques intégrables sur l'intervalle $[a, b]$. On pose maintenant

$$\alpha = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad \beta = \left(\int_a^b |g(x)|^q\right)^{1/q}.$$

Montrer que pour tout $x \in]a, b[$ on a

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\beta^q}\,.$$

(d) En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/q}$$

Exercice II : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ strictement positive intégrable. Montrer que

$$\int_a^b f(t)\,dt \int_a^b \frac{dt}{f(t)} \geqslant (b-a)^2.$$

Etudier les cas d'égalité.

Exercice III : Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. Montrer que

$${I_{n+p}}^2 \leqslant I_{2n} I_{2p}\,.$$