Université de Bretagne Occidentale — L2-Maths/PMRC

Faculté des Sciences et Techniques — Intégrale de Riemann et probabilités

Département de Mathématiques — *Année 2016-2017*

Feuille 4 - Intégrale des fractions rationnelles, fonctions trigonométriques et racines

Exercice I : Décomposer en éléments simples les fractionnes rationnelles suivantes et en trouver une primitive :

$$\frac{1}{x^3-x} \qquad \frac{x^2+2x+5}{x^2-3x+2} \qquad \frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \qquad \frac{2x^2+1}{(x^2-1)^2} \qquad \frac{x^3+1}{(x-1)^3} \qquad \frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}$$

Exercice II : Calculer les primitives

$$\int \sin^2 x\,\cos^3 x\,\mathrm{d}x,\ \int \sin^3 x\,\cos^4 x\,\mathrm{d}x,\quad \int \cos^5 x\,\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\mathrm{d}x,\quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x,\ \int \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$$

Exercice III : Montrer que

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}$$

Exercice IV : Calculer la primitive $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\beta\cos x}$ avec α, β constantes telles que $\alpha > 0$ et $|\beta| < \alpha$. En déduire que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\beta\cos x} = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha+\beta\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\,.$$

Exercice V : Calculer

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\,.$$

Exercice VI : Calculer

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{1+x^2}}\,.$$