Université de Bretagne Occidentale
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Mathématiques

L1-Maths/PMRC
Analyse
Année 2017-2018

Feuille 8 - fonction reciproque, accroissements finis, formule de Taylor-Lagrange

Rappels : Dérivée de la fonction réciproque. Soit $f : I \to J$ une fonction dérivable bijective entre intervalles I et J et soit $g = f^{-1} : J \to I$ sa fonction réciproque. Si $y = f(x)$ alors $g'(y) = 1/f'(x)$.

Formule de Taylor-Lagrange. Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable et soit $a \in J$; alors $\forall x \in J$ il existe ξ entre a et x tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

Le 2ème terme dans la partie droite s'appelle le reste. Il y a d'autres versions du reste.

Exercice I : Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\arccos x\ ; \qquad \arctan x\ ; \qquad (1-x)^{1/3}\ .$$

Exercice II : (i) On considère $\operatorname{sh} x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Montrer que $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection et calculer la dérivée de sa fonction réciproque $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) La fonction $\operatorname{ch} x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ n'est plus une bijection ; expliquer pourquoi. Montrer que $\operatorname{ch} : [0, \infty[\to [0, \infty[$ est une bijection et calculer la dérivée de sa fonction réciproque.

Exercice III : En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que :

(i) pour tout $x \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$ on a $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$;

(ii) pour tout $x > 0$ on a $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$;

(iii) pour tout $x \in]0, \pi/2[$ on a $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$;

(iv) pour tout $x \geqslant 0$ on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$;

(v) pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ on a $\ln(1+\cos x) \leqslant \ln 2 - \dfrac{x^2}{4}$.

Exercice IV : (i) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0,1]$, on a $\sqrt{1-x} \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}$;

(ii) Montrer que pout tout x de l'intervalle $[0, \pi/4]$, on a

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8}\left(1 - \frac{\pi^2}{16}\right)^{-3/2} \leqslant \sqrt{1-x^2}\,.$$

(iii) Montrer que pour rour x de l'intervalle $[0, \pi/4]$, on a

$$0 \leqslant \cos x - \sqrt{1-x^2} \leqslant Mx^4 \,,$$

où M est une constante positive que l'on déterminera.

Exercice V : Montrer que, quels que soient les réels x et y,

$$|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x-y| \,.$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice VI : Montrer que pour tout x réel

$$\ln(1+x^2) \leqslant |x| \,.$$

Exercice VII : Soit f une fonction de classe C^1 définie sur $[a, b]$. Montrer que

$$(b-a) \min_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)| \leqslant 2 \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| \,.$$

Exercice VIII : (i) Déterminer le polynôme de Talyor T_n à l'ordre n en 0 de la fonction f définie sur $]-1, \infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr que, pour tout x de l'intervalle $[0, 10^{-1}]$, on ait

$$|\ln(1+x) - T_n(x)| \leqslant 10^{-6} \,?$$

(ii) Démontrer que

$$|\ln 2 - T_n(1)| \leqslant \frac{1}{n+1} \,,$$

et en déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

admet $\ln 2$ pour limite.

Exercice IX : Soit f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout x réel, on a $|f(x)| \leqslant 1$ et $|f''(x)| \leqslant 1$. En utilisant la formule de Taylor entre x et $x+2$, montrer que $|f'(x)| \leqslant 2$.